

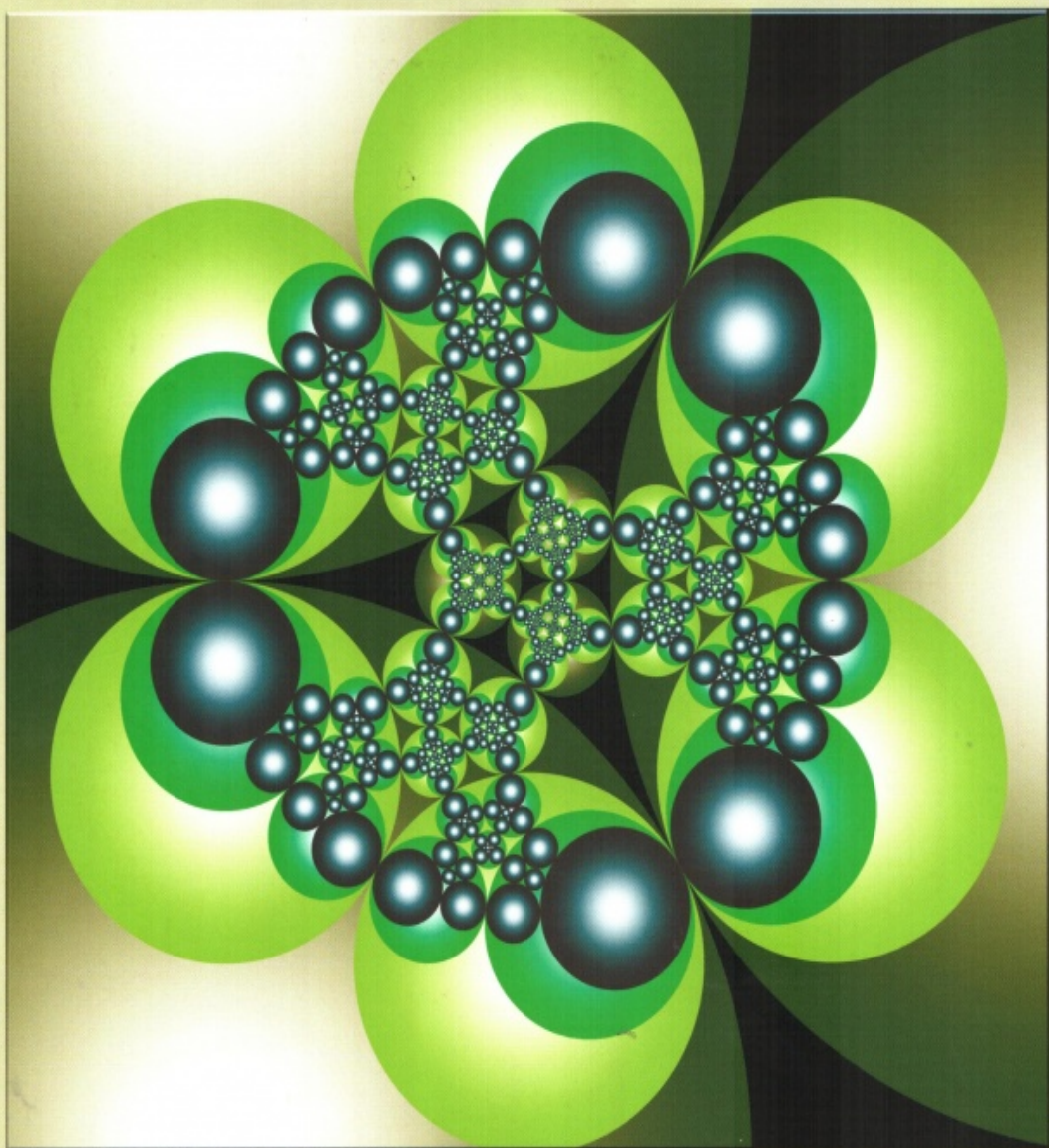
ИЮЛЬ/АВГУСТ

М'к'а з' 070

2011 • №4

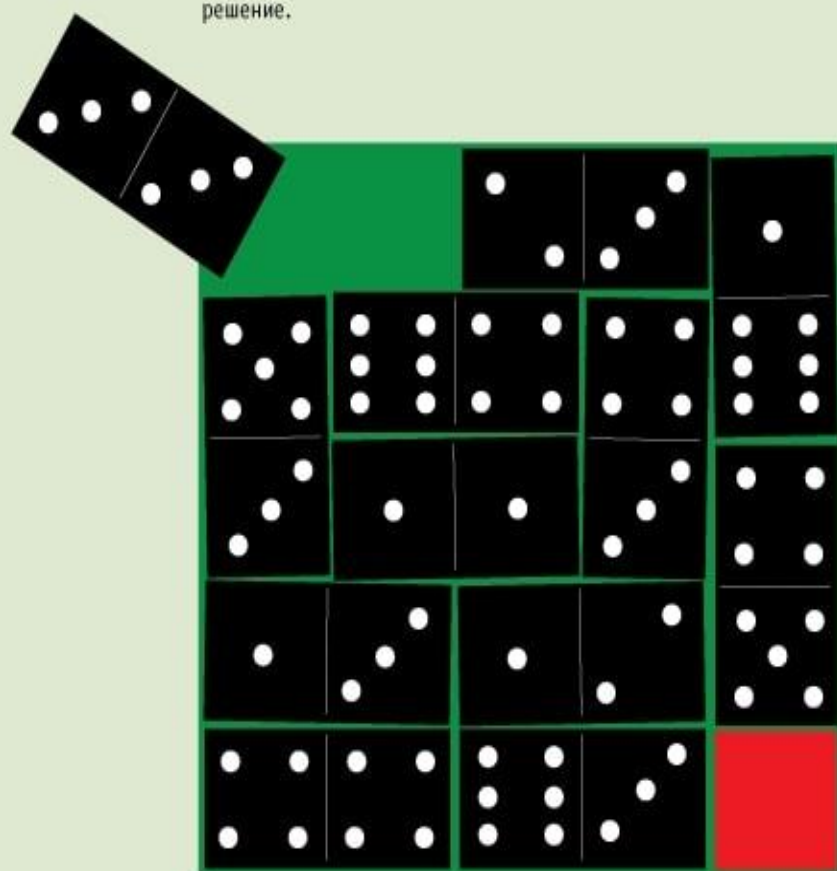
КВАНТ+

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ГОЛОВОЛОМКИ ИЗ ДОМИНОШЕК - НОВЫЙ ШТУРМ

Для изготовления серии головоломок понадобится много костяшек домино 2×1 , квадратик 1×1 и коробка $n \times n$, где n – нечетное число, $n \geq 5$. Поставим квадратик в правый нижний угол коробки, а оставшуюся часть произвольно заполним домино. Затем вытащим доминошку, покрывающую левый верхний угол. Зададимся вопросом: «Можно ли передвинуть квадратик из правого нижнего угла в левый верхний угол?» Вынимать из коробки теперь, конечно же, ничего нельзя. В большинстве случаев это невозможно, однако существуют расположения доминошек, когда головоломка имеет решение.



В номере:

- 2 Язык симметрии. *Д.Мамфорд, Д.Райт, К.Сирик*
11 Еще раз об аэродинамическом парадоксе. *С.Травин*
-

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 18 Никола Тесла. *Е.Фискинд, К.Корнисик*
-

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 20 Задачи M2229–M2235, Ф2235–Ф2242
21 Решения задач M2206–M2211, M2213, Ф2220–Ф2227
-

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 28 Задачи
29 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
29 Приятного аппетита! *И.Акулич*
-

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Где ошибка?
-

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 34 «Исправленный» закон Кулона. *С.Варламов*
-

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 36 Охота на призрак Леонардо. *П.Самовол, В.Журавлев*
39 Раскраски графов и линейные уравнения. *В.Дорофеев, А.Сливак*
-

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 43 Свет в неоднородной среде. *В.Майер, Е.Вараксина*
-

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 47 Определение периода колебаний: динамический и энергетический подходы. *А.Черноуцан*
-

ОЛИМПИАДЫ

- 52 XXXII Турнир городов
53 Избранные задачи LXXIV Московской математической олимпиады
55 Избранные задачи Московской физической олимпиады

59 Ответы, указания, решения
Смесь (26, 27)
-

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Язык симметрии»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*

ЯЗЫК СИММЕТРИИ

Д. МАМФОРД, Д. РАЙТ, К. СИРИС

*Вскипятите его, остудите во льду
И немножко припудрите мелом,
Но одно безусловно имейте в виду:
Не нарушить симметрию в целом!*

Льюис Кэрролл. Охота на Снарка
(пер. Г. Кружкова)

ДЛЯ МАТЕМАТИКА ПОНЯТИЕ СИММЕТРИИ ИМЕЕТ гораздо более широкий смысл, нежели тот, который мы используем в повседневной жизни. Одним из первых, кто пришел к этому более глубокому пониманию симметрии, был выдающийся и очень влиятельный немецкий математик Феликс Клейн. В 1872 году, в докладе по случаю вступления в должность профессора Эрлангенского университета (в необычайном молодом возрасте всего 23 лет) Клейн предложил математическому сообществу радикально расширить общепринятый взгляд на симметрию и считать симметричными объекты, которые прежде никто не подумал бы так называть. Прочитываемые выше строки Льюиса Кэрролла (настоящее имя которого – Чарльз Доджсон), математика, преподавателя оксфордского колледжа Крайст-Чёрч, были написаны всего четырьмя годами позже. Не исключено, что Доджсон был слышан об идеях Клейна и именно о них думал, сочиняя эту нелепицу.

В написанной по материалам этого доклада вошедшей в историю короткой статье¹ молодой Клейн подвел итог более чем пятидесятилетнего развития математики, выдвинув новые идеи, коренным образом изменившие ее дальнейшее развитие. Сегодня трудно оценить в полной мере значимость сказанного Клейном, потому что его лекция привела к

смене парадигмы, которая задним числом кажется совершенно очевидной, и трудно даже поверить, что раньше кто-то мог думать иначе.

Коротко говоря, Клейн предложил рассматривать геометрию как «изучение свойств пространства, инвариантных относительно данной группы преобразований». При изучении геометрии, утверждал Клейн, нужно рассматривать не только объекты (треугольники, окружности, икосаэдры или же фигуры гораздо более дикого вида – как, например, фрактал на первой странице обложки), но и перемещения. При классическом евклидовом взгляде на геометрию, господствовавшим на протяжении более чем двух тысячелетий, под перемещениями всегда понимались только движения

Феликс Христиан Клейн (1849–1925)

Феликс Клейн родился в Дюссельдорфе, принадлежавшем в то время Прусской империи, в 1849 году. Он изучал математику и физику в Боннском университете. Работу над диссертацией Клейн начал, намереваясь стать физиком, однако под влиянием своего научного руководителя Плюккера он увлекся геометрией. Плюккер умер в 1868 году, в том же году, когда Клейн получил докторскую степень; естественно, что именно Клейну выпало завершать работу своего руководителя. Этим он обратил на себя внимание Клебша, одного из ведущих профессоров Гёттингенского университета. Вскоре Клебш убедился, что Клейн имеет все шансы стать ведущим математиком своего времени.



В 1872 году Клейн получил приглашение на должность профессора Эрлангенского университета в Баварии, и последующие 10 лет были для него периодом расцвета творческой активности. В 1875 году он перешел в Высшую техническую школу в Мюнхене, где нашел много талантливых студентов, и его педагогический талант раскрылся в полной мере. В том же году он женился на Анне Гегель, внучке знаменитого философа. В 1880 году Клейн переехал в Лейпциг, где в то время кипела математическая жизнь. Здесь он создал ту глубокую теорию, которой посвящена эта книга. Но здесь же из-за сильного напряжения, вызванного острым соперничеством с блестящим молодым французским математиком Пуанкаре, резко ухудшилось его и без того слабое здоровье. В 1883–1884 годах Клейн страдал от постоянных депрессий, и впоследствии он так и не смог полностью восстановить свой математический потенциал. Та его работа, которая относится к предмету нашей книги, была существенно развита в двух трактатах, написанных совместно с Робертом Фрике в период с 1890 по 1912 год.

В 1886 году Клейн занял кафедру в Гёттингене, где и работал до выхода в отставку. Он был не только выдающимся математиком, но обладал и значительными организационными и административными способностями. Именно благодаря его таланту и энергии была создана знаменитая гёттингенская математическая школа, которая была ведущим мировым математическим центром, пока в 1930-е годы ее не разрушил Гитлер. Распространению идей и влияния Клейна во всем мире во многом способствовали учившиеся у него иностранцы. Среди его учеников – американцы Фрэнк Коул и Уильям Осгуд, итальянцы Луиджи Бьянки и Грегорио Риччи-Курбастро, а также один из первых женщин-математиков Мэри Ньюсон и Грейс Чизхолм Янг. На рубеже столетий Клейн активно интересовался вопросами преподавания математики и содействовал введению в школьную программу основ математического анализа. Он вышел в отставку по состоянию здоровья в 1913 году и скончался в Гёттингене в возрасте 76 лет.

Глава из книги «Ожерелье Индры. Видение Феликса Клейна». – М.: МЦНМО, 2011. Печатается в сокращении.

¹ Опубликованной под высокочувствительным названием «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», но известной ныне как «Эрлангенская программа».

твердого тела: можно взять фигуру и поместить ее идентичную копию в новое место. Радикальная идея Клейна состояла в том, что и другие перемещения, которые могут существенно растягивать или сжимать объекты, также следует считать геометрическими. При таком подходе геометрия охватывает гораздо более широкий класс задач, чем в классическом понимании. Геометрии должны изучать те свойства объектов, которые сохраняются при перемещениях, — как нам изящно советует Эрролл в своем четверостишии.

Круг идей, занимавших Клейна, связан с двумя понятиями: это идея подобных или симметричных объектов и идея «преобразования» или «перемещения». Клейн соединил их вместе, используя понятие **группы**, разработанное пятьюдесятью годами ранее другим исключительно молодым математиком Эваристом Галуа. За время своей короткой карьеры, в период с 1829 по 1831 год, Галуа осознал, что корни многочлена можно изучать при помощи их «симметрий»; так, например, $+\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ можно рассматривать как симметричные решения уравнения $x^2 - 2 = 0$. Идеи Галуа были совершенно недоступны пониманию современников, и его работа едва не оказалась потерянной навсегда.² Клейн понял, что не стоит пытаться каталогизировать все возможные типы симметрий и выставлять их напоказ, как это делали средневековые мусульманские строители Альгамбры. Понятие группы дает очень простой и в то же время необычайно мощный математический инструмент для описания симметрий всех возможных типов.

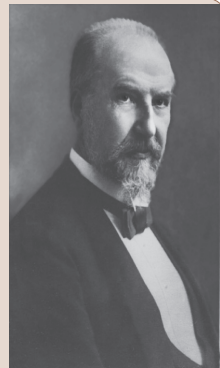
Идея группы состоит в том, чтобы описывать правила, отвечающие за *повторяемость*, присущую симметрии. Например, если какой-то шаг можно сделать один раз, то его же можно сделать еще раз, и еще, и еще. Это может вернуть вас обратно в то же самое положение, с которого вы начинали (как в случае зеркала, когда два отражения возвращают в исходное состояние), а может привести к возникновению расширяющейся мозаики из объектов, покрывающих регулярным узором все большую и большую площадь, наподобие плиток, устилающих огромный пол.

Коротко говоря, обычно симметрия понимается в терминах рисунков и пропорций как трудноопределимое свойство некой сбалансированности и правильно-

Роберт Фрике (1861–1930)

Роберт Фрике родился в Хельмштедте, Германия. Некоторое время он учился и преподавал в Гёттингене, а в 1885 году закончил Лейпцигский университет, написав диссертацию под руководством Клейна. Его сотрудничество с Клейном началось с публикации двух томов их первого совместного труда «Лекции по теории эллиптических модулярных функций», вышедших в 1890 и 1892 годах. В этот период Фрике преподавал в двух гимназиях Брауншвейга, а также, что более любопытно, был наставником двух сыновей прусского принца-регента Альбрехта. Он защитил диссертацию, дающую право на занятие профессорской должности («Habilitation»), в Киле и с 1892 года работал приват-доцентом в Гёттингене. В 1894 году Фрике занял место ушедшего в отставку Дедекинда в университете Кароло-Вильгельмина в Брауншвейге, а его давние дружеские отношения с Клейном упрочились, когда в том же году он женился на племяннице Клейна Элеоноре Флендер.

Фрике пользовался большим авторитетом и как математик, и как человек. В тесном сотрудничестве с Клейном они создали большую часть теории, известной ныне как теория **клейновых групп**, которой и посвящена наша книга. Фрике играл важнейшую роль в управлении университетом, являясь его ректором в период с 1904 по 1906 год, а также с 1921 по 1923 год. Он принимал участие в работе над государственной образовательной программой (здесь очень пригодился его опыт работы школьным учителем) и занимал несколько официальных постов. Этим обилием обязанностей объясняется длинный промежуток между выходом первого и второго тома (в 1897 и 1912 году соответственно) второго совместного с Клейном труда «Лекции по теории автоморфных функций», фактическим автором которого был именно Фрике, хотя Клейн также внес свой немалый вклад. В последнем томе Фрике использовал новейшие достижения математики, такие как канторовская теория множеств и теория размерности Брауэра, для решения ряда ранее не поддававшихся задач. Он работал в Брауншвейге до самого конца жизни.



сти.³ Со времен Клейна в распоряжении математиков имеется более точное определение: симметрия — это баланс, создаваемый повторением многих движений одного и того же вида, а именно всех движений из некоторой группы. Эти две идеи — введение в геометрию групповых соображений и расширение класса изучаемых движений — и легли в основу собственных исследований Клейна. Именно эти сюжеты он объединил в своей знаменитой Эрлангенской программе.

Значительная часть последующей работы Клейна была связана с выявлением и изучением одного конкретного нового типа симметрии, о котором и пойдет речь в книге «Ожерелье Индры». Однако прежде чем исследовать эти новые миры, давайте потратим немного времени и взглянем на хорошо знакомые евклидовы симметрии с новой **клейновской** точки зрения.

Таксономия симметрии

На рисунке 1 приведена часть спутникового снимка сельскохозяйственного штата Айова, а рядом с ней — идеализированное изображение той же местности с доведенной до совершенства симметрией. Простирающийся насколько хватает глаз ландшафт выглядит как правильный узор, составленный из отдельных ферм величиной в одну квадратную милю, каждая из кото-

² История Галуа — одна из самых романтических в истории математики; подробнее об этом будет рассказано во второй части статьи, которая будет опубликована позже.

³ В словаре Чемберса находим: «Точное соответствие частей по обе стороны от прямой или плоскости, либо же относительно центра или оси; баланс или верная пропорция; красота формы; расположение частей».

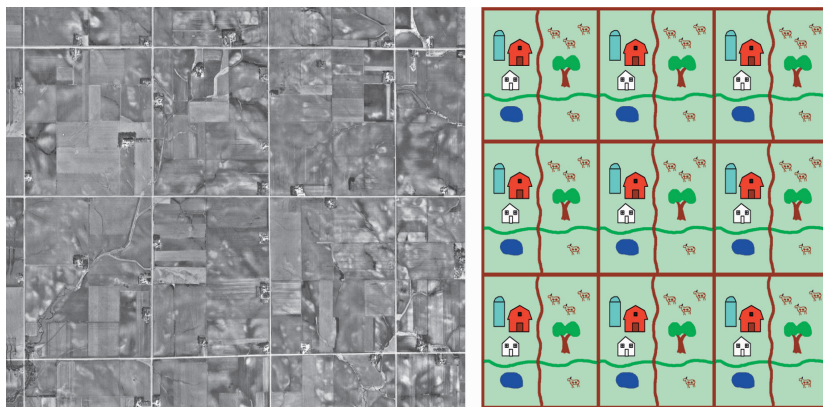


Рис.1. Спутниковый снимок штата Айова слева не сильно отличается от его идеализированной версии справа. Обратите внимание на коричневые тропинки, пересекающие каждую ферму в направлении с севера на юг, и на зеленые тропинки в направлении с востока на запад

рых содержит один дом, один пруд и одно дерево. Этот мир настолько симметричен, что, проехав одну милю на север, юг, запад или восток, вы окажетесь в точке, вид из которой неотличим от того, который вы наблюдали ранее.

Математика, изучающего симметрию, интересуют не подробности наблюдаемой картины – пасется ли на каждом поле одна овца или две коровы, – а **движения**, которые необходимо совершить, чтобы добиться повтора. Такое движение легко осуществить с помощью компьютера: нарисуйте цветок, а затем скопируйте изображение в другое место страницы. При этом можно думать, что вы переместили цветок, а можно – и именно эту точку зрения предпочитают математики – считать, что вы взяли всю страницу целиком и положили ее обратно таким образом, что цветок оказался на новом месте. Стало быть, движение цветка может быть реализовано определенным движением всей плоскости. На рисунке 2 показаны два цветка, перемещающиеся под действием **параллельного переноса**. Сами цветки совершенно не похожи, но с точки зрения математика оба рисунка обладают одной и той же **трансляционной симметрией**.

Симметрия создается при помощи многократного повторения, или **итерирования**, одного и того же движения. Рисунок или объект **симметричен** относительно движения, если при этом движении отдельные

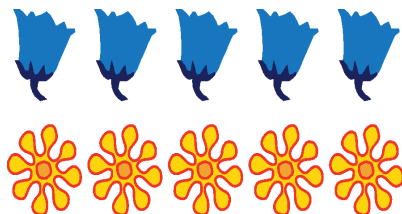


Рис.2. Два ряда цветов, полученные с помощью одного и того же параллельного переноса. Сами цветки совершенно не похожи, но оба ряда обладают одинаковой симметрией

точки перемещаются, но весь рисунок или объект в целом остается без изменений. Простейшим типом симметрии обладает форма, которая повторяет себя бесконечно, каждый раз сдвигаясь на одно и то же фиксированное расстояние в одном и том же фиксированном направлении. Хороший пример такого рода – прямое железнодорожное полотно через плоскую прецию, тянущееся от горизонта до горизонта,⁴ как на рисунке 3. Мысленно сдвиньте все полотно вперед так, чтобы каждая шпала переместилась на место следующей. Это движение называется **параллельным переносом** или **сдвигом**: величина сдвига есть расстояние между шпалами, а его направление – направление полотна. После параллельного переноса полотно выглядит в точности так же, как и раньше, но на самом деле каждая шпала сдвинулась вперед и заняла место следующей за ней. Заметьте, что мы опять имеем дело с двумя разными вещами: абстрактным движением (параллельным переносом) и физическим объектом (железнодорожным полотном). Говоря, что объект обладает трансляционной симметрией, мы имеем в виду, что при физическом перемещении этого объекта в новое положение отдельные его части сдвигаются, но вид всего объекта в целом не изменяется.

Архитекторы с блеском применяют трансляционную симметрию. Повторяющаяся структура может создавать превосходный зрительный эффект, как видно на примере фриза, изображенного на рисунке 3.

Морская звезда на рисунке 4 – хороший пример **вращательной симметрии**. У звезды 12 лучей, поэтому при повороте на $360^\circ : 12 = 30^\circ$ относительно центра каждый луч повернется, но сама звезда будет выглядеть в точности так же, как и раньше.

Третий тип симметрии – это **зеркальная симметрия**, или симметрия относительно отражения. Такой симметрией обладает наше тело, что демонстрирует знаме-

⁴ В Англии железнодорожные пути обычно не настолько длинные и прямые.



Рис.3. Два проявления трансляционной симметрии: железнодорожный путь через прерию и фриз из древнего мексиканского города Оахака

нитый рисунок Леонардо да Винчи (см. рис.4). Вообразите вертикальную плоскость или зеркало, разделяющее правую и левую половину стоящего человека, и представьте себе, что каждый атом с левой стороны от

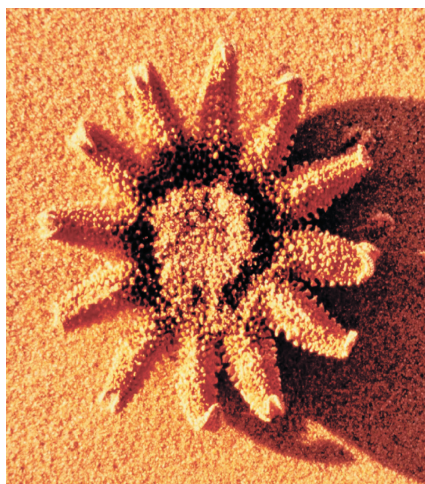


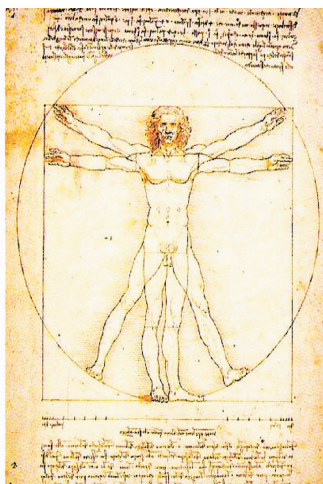
Рис.4. Слева: морская звезда обладает вращательной симметрией. Данная звезда имеет 12 лучей, поэтому она симметрична относительно поворотов на $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Справа: знаменитый рисунок Леонардо да Винчи, демонстрирующий пропорции мужской фигуры; рисунок обладает почти идеальной зеркальной симметрией

зеркала перемещается в точку, которая находится на том же горизонтальном уровне и на том же расстоянии от зеркала, только справа, и наоборот. Портретисты возражат, что левая сторона лица отражает иные грани нашей личности, нежели правая, а врачей озадачит нестандартное положение печени и толстой кишки, но в целом можно сказать, что тело не изменилось. Большинство транспортных средств – автомобили, лодки, велосипеды, самолеты – обладают почти идеальной зеркальной симметрией, особенно снаружи. Может быть, подсознательно мы создаем их по своему подобию.



Рис.5. Соты – прекрасный пример объекта, обладающего множественными симметриями всех трех типов

Эти три типа симметрии в разных проявлениях нередко можно увидеть в одной и той же фигуре. Например, посмотрим на соты, изображенные на рисунке 5. Читатель должен без труда распознать здесь следующие симметрии:



- трансляционные симметрии в каждом из трех различных направлений,
 - вращательная симметрия на 120° относительно точек, где сходятся три ячейки,
 - вращательная симметрия на 60° относительно центра каждой ячейки,
 - зеркальная симметрия относительно ребер между двумя соседними ячейками,
 - зеркальная симметрия относительно прямых, соединяющих середины двух противоположных сторон.
- Без сомнения, читатель найдет здесь и другие, более сложные симметрии, но все они получаются комбинациями симметрий, перечисленных выше. Как это делается строго математически, мы выясним ниже.

Прежде чем закончить с основными видами симметрий, мы хотели бы представить вам доктора Стрелкина, давнего коллегу авторов, который будет вашим

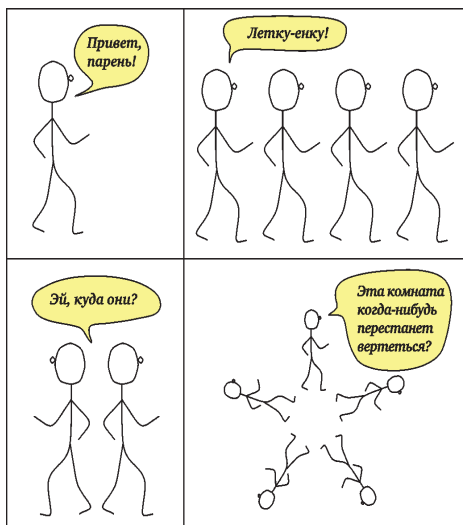


Рис.6. В левом верхнем углу – портрет доктора Стрелкина; остальные три рисунка показывают, как он движется под действием параллельного переноса, отражения и поворота соответственно

надежным гидом по страницам этой книги. Его портрет вы видите на левом верхнем фрагменте рисунка 6; остальные фрагменты этого рисунка демонстрируют перемещения доктора Стрелкина под действием трансляционной, зеркальной и вращательной симметрии плоскости. Сейчас доктор ведет себя относительно солидно, но по мере расширения наших представлений о симметрии и изучения новых видов движений он будет двигаться все более экзотическим образом.

Как мы видели, есть два способа рассуждать о симметрии. С одной стороны, можно указать на симметричные объекты и сказать, что они служат примерами трансляционной, вращательной или зеркальной симметрии. Однако другой, более глубокий подход состоит в том, чтобы абстрагироваться от рисунка и изучать лежащие в его основе движения сами по себе.

Первый способ привлекателен тем, что дает нам нечто осязаемое и видимое; но второй подход более фундаментален, так как абстракция не содержит ненужных подробностей и позволяет сосредоточиться на симметрии как таковой.

Преобразования плоскости

В предыдущем разделе мы говорили о симметриях как о «перемещениях» или «движениях» плоскости. Математики, которые стремятся к исключительной точности языка даже больше, чем юристы, обычно используют несколько более широкое понятие **преобразования**; общеупотребительным синонимом преобразования является **отображение**. Как часто бывает в математике, эти обычные слова используются в специальном и очень точном смысле. Объясним подробно, что они означают. В максимально широком смысле **преобразование** плоскости – это правило, сопоставляющее каждой точке P плоскости новую точку Q . Например, правило может иметь вид «новая точка находится на 3 дюйма левее старой» или «новое положение точки получается поворотом на 90° относительно центра O ». Точка Q , в которую мы попадаем, следуя правилу, называется **образом**⁵ исходной точки P . Можно придумать огромное количество разных правил, однако мы будем рассматривать только те из них, действие которых обратимо. Например, эффект от применения правила «сдвинуть все точки на 3 дюйма влево» можно обратить с помощью правила «сдвинуть все точки на 3 дюйма вправо» (рис. 7).

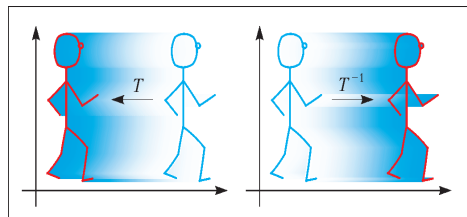


Рис.7. На доктора Стрелкина действует преобразование T , которое сдвигает его на 3 дюйма влево. На втором рисунке видно, как на доктора действует обратное преобразование T^{-1} , сдвигающее его обратно на 3 дюйма вправо

Практичнее подход, состоящий в том, чтобы рассматривать преобразование как процедуру физического перемещения точек плоскости. При этом относительное положение точек может сильно исказиться, но все фигуры и объекты, находящиеся на плоскости, вовлекаются в движение и перемещаются одновременно. Подобное искажение можно наблюдать на примере классической скульптуры Паолины, см. левый фраг-

⁵ Математики склонны давать специальные названия всему, о чем они говорят. И не только для солидности: так хирург раскладывает инструменты перед операцией и проверяет, что ассистенты знают их правильные названия, ибо он должен быть уверен, что в случае необходимости ему дадут именно то, что нужно.

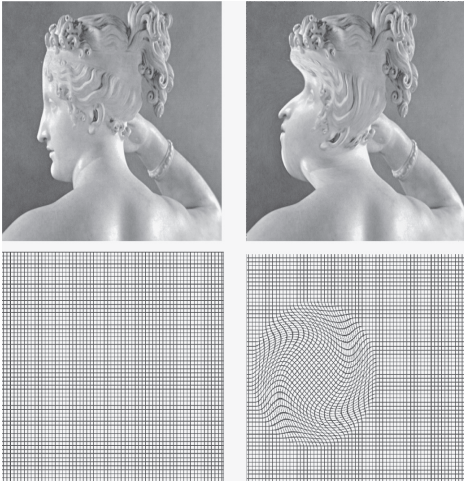


Рис.8. Действие сильно искажающего преобразования на скульптуру Паолины. На левом верхнем фрагменте мы видим изящную греческую фигуру, а на правом – результат применения отображения, превратившего ее в ужасную карикатуру. Решетки внизу иллюстрируют примененное правило. Следя за тем, что происходит в каждом квадрате, можно выяснить, как преобразование действует на все точки плоскости. Грубо говоря, правило состоит в следующем: нужно повернуть область, ограниченную некоторой окружностью, на 45° по часовой стрелке, а затем сгладить полученный эффект, поворачивая точки, лежащие внутри расширяющихся концентрических колец, на все меньший и меньший угол, вплоть до самой внешней окружности, вне которой все точки остаются неподвижными

мент рисунка 8. Хотя на правом фрагменте форма Паолины радикально изменилась, отдельные ее черты по-прежнему хорошо различимы. Чтобы получить правый рисунок, мы применили правило, предписывающее, как именно следует перемещать каждую точку левого рисунка в ее новое положение. Это преобразование существенно изменило форму Паолины, сохранив все ее характерные черты.

Чтобы продолжить обсуждение и при этом избежать многословия, к которому мы вынуждены были прибегать выше, необходимо ввести обозначения. Обычно мы используем буквы S и T для обозначения преобразований, а буквами P и Q , следуя Евклиду, обозначаем точки плоскости. Как и большинство математиков, через $T(P)$ мы обозначаем образ точки P под действием преобразования T ; таким образом, $T(P)$ есть «новая точка, полученная применением правила T к точке P ». Например, правило преобразования может быть таким:

$T(P)$ есть точка, находящаяся на 3 дюйма левее P .

Нередко мы будем говорить о преобразовании в активном залоге: « T отображает P в $T(P)$ ».

Правило, которое обращает эффект, произведенный преобразованием T , называется **обратным** к T и обозначается T^{-1} . Так, например, обращением правила

$T(P)$ есть точка, находящаяся на 3 дюйма левее P , является правило

$T(P)$ есть точка, находящаяся на 3 дюйма правее P .

Часто нас будет интересовать действие правила или преобразования T на целую конфигурацию точек, скажем, окружность C или пару параллельных прямых L и M . Обозначение $T(C)$ – это удобное сокращение для «множества всех таких точек $T(P)$, что P лежит в C ». Иными словами, $T(C)$ есть образ множества C под действием преобразования T .

До сих пор мы не уточняли, что именно понимается под «плоскостью». Каждый, кто изучал работы Евклида (или читал прекрасную старую книгу о Флатландии⁶), скорее всего, имеет некоторое представление об этом идеализированном двумерном мире, но иногда проще оперировать формулами, чем словами, которые часто грешат неточностью. Как вы, несомненно, учили в школе, стандартные декартовы координаты позволяют задавать точки «плоскости» с помощью двух чисел x и y ; для этого нужно выбрать

- начало координат, которым может служить любая точка;
- две перпендикулярные прямые, проходящие через начало координат, которые называются осью x (или горизонтальной осью) и осью y (или вертикальной осью)⁷.

Любая точка P на плоскости представляется двумя числами x и y , которые задают расстояния от нее до координатных осей; обычно эти числа записывают в виде пары (x, y) . Расстояние x от точки P до вертикальной оси считается положительным, если точка находится справа от нее, и отрицательным, если слева; расстояние y от точки P до горизонтальной оси считается положительным, если точка находится выше нее, и отрицательным, если ниже.

Открытие Декарта состояло в том, что алгебра – это мощное средство для изучения геометрии. Вместо слов «сдвиньте все точки на 3 дюйма влево» можно сказать «сдвиньте точку с координатами (x, y) в точку с координатами $(x - 3, y)$ ». Уменьшение x на 3 перемещает точку на 3 единицы (в данном случае, 3 дюйма) влево, а тот факт, что y не изменяется, означает, что точка остается на той же горизонтальной прямой. Таким образом, преобразование T , заданное правилом

$T(P)$ есть точка, находящаяся на 3 дюйма левее P , записывается в сжатом виде формулой

$$T(x, y) = (x - 3, y).$$

Желая показать динамику преобразования, мы иногда пишем

$$T : (x, y) \mapsto (x - 3, y);$$

эта запись читается так: «преобразование T отображает точку (x, y) в точку $(x - 3, y)$ ».

⁶ Э.Эбботт. «Флатландия». – М.: Мир, 1976.

⁷ Или осями абсцисс и ординат. (Прим. перев.)

Трансляционные, вращательные и зеркальные симметрии – примеры преобразований плоскости. Так, параллельный перенос всегда можно записать формулой

$$T(x, y) = (x + a, y + b).$$

Эта запись означает, что каждая точка (x, y) плоскости сдвигается на a единиц вправо (или влево, если a отрицательно) и b единиц вверх (или вниз, если b отрицательно). Отражение относительно оси y задается правилом

$$T(x, y) = (-x, y).$$

Эта формула означает, что каждая точка остается на той же горизонтали, но при этом точка, лежащая на расстоянии x от оси y , переходит в точку, лежащую на том же расстоянии от оси, но по другую сторону.

Формула, задающая поворот, немного сложнее. На рисунке 9 показано, как вывести формулу для поворота на 90° против часовой стрелки относительно начала

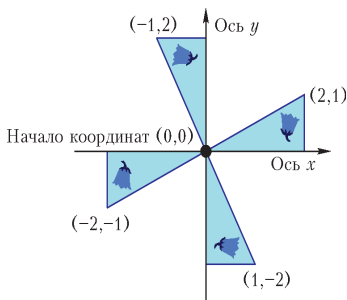


Рис.9. Для задания любой точки плоскости можно использовать декартовы координаты. На этом рисунке видно, как угол с вершиной в точке $(2,1)$ поворачивается на 90° под действием отображения $T(x, y) = (-y, x)$ и оказывается в точке $(-1,2)$.

координат O . В этом случае правило имеет вид $T(x, y) = (-y, x)$.

Формулы для трех основных типов симметрий в декартовых координатах приведены ниже. Если эти формулы вам незнакомы, рекомендуем вывести их самостоятельно, следуя указаниям упражнения 2.

Вооружившись новым языком, мы готовы придать

Формулы для трех основных типов симметрий

Здесь приведены общие формулы для трех основных типов симметрий.

1. Параллельный перенос T , который сдвигает точку на a единиц вправо и b единиц вверх:

$$T(x, y) = (x + a, y + b).$$

2. Поворот R на угол θ против часовой стрелки относительно начала координат:

$$R(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

3. Симметрия S относительно вертикальной оси y :

$$S(x, y) = (-x, y).$$

точный смысл понятия, которое мы называли «движением плоскости». А именно, это преобразование, не меняющее ни относительные положения объектов, ни их размеры, так что, в частности, любые две точки P и Q всегда находятся на том же расстоянии друг от друга, что и их образы $T(P)$ и $T(Q)$. Кроме того, угол

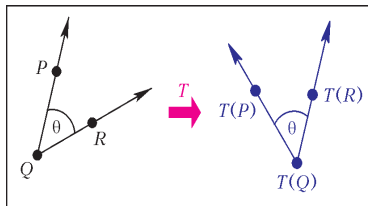


Рис.10

$\angle PQR$ равен углу $\angle T(P)T(Q)T(R)$ (рис.10), образованному их образами. Любое движение плоскости, обладающее этими свойствами, является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо отражением, либо же отражением относительно прямой с последующим сдвигом вдоль этой прямой. Преобразование четвертого типа, называемое **скользящей симметрией**, можно увидеть на фризе, изображенном на рисунке 3.⁸

Композиция, или Как получить много преобразований из нескольких

Вернемся к составленному из шестиугольников узору сот (см. рис.5), известному также в своем более прозрачном воплощении как узор плиток на полу общественной уборной. Как мы видели, симметрии – это такие движения или преобразования узора или фигуры, которые, перемещая отдельные точки, оставляют весь узор в целом без изменений. В нашем случае это преобразования, обладающие следующим очень специальным свойством: они сдвигают весь пол целиком и вновь совмещают его с собой таким образом, что каждая плитка оказывается на месте какой-то другой плитки. Рассматривая пол, подвергнутый такому преобразованию, вы не заметите никаких изменений. Иными словами, симметрия пола – это преобразование T , которое перемещает каждую плитку U на место какой-то другой плитки V ; на языке формул $T(U) = V$.⁹ Это означает, что каждая точка плитки U под действием преобразования T переходит в точку, принадлежащую ее образу V . Мы не исключаем возможности, что $U = V$, т.е. плитка U как единое целое остается на своем месте, хотя, возможно, поворачивается или отражается так, что некоторые или все ее точки меняют свое положение. Так будет, например, если сделать поворот на 60° относительно центра одной из плиток. Коротко мы говорим, что «преобразование T сохраняет, или

⁸ На самом деле свойство сохранения углов следует из свойства сохранения расстояний. Чтобы убедиться в этом, вспомните, что углы треугольника определяются длинами трех его сторон.

⁹ Здесь мы игнорируем проблемы, связанные с наличием стен, и предполагаем, что плиточный узор простирается сколь угодно далеко во всех направлениях.

оставляет инвариантным, плиточный узор». Итак, мы придали точный математический смысл утверждению, что T является **симметрией** замощенного плитками пола.

Теперь рассмотрим новую операцию над преобразованиями. Мы хотим, начав с двух преобразований S и T плоскости, составить новое правило, задающее третье преобразование. Это новое преобразование называют **композицией** S и T и символически записывают в виде произведения: ST . Правило, задающее ST , очень просто:

сначала применить T , а затем S .

Иными словами, оно состоит в следующем. Возьмем точку P . Применяя правило, задающее преобразование T , получим точку $T(P)$, в которую T переводит P . Теперь применим правило, задающее преобразование S , к образу $T(P)$. Мы получим точку, в которую S переводит $T(P)$, т.е. $S(T(P))$. Это и есть правило, задающее преобразование ST . В символической записи имеем

$$ST(P) = S(T(P)).$$

Обратите особое внимание на порядок, который здесь очень важен. Хотя символы читаются слева направо, правило ST означает, что надо

сначала применить T , а затем S .

Если вы хотите произвести операции в другом порядке, т.е.

сначала применить S , а затем T ,

то вам следует применить композицию TS .

Композиция преобразований подобна кулинарному рецепту: каждый шаг, описанный в рецепте, предписывает произвести определенные преобразования с набором ингредиентов, а весь рецепт в целом есть не что

иное как композиция всех этих преобразований. При этом, как и в рецепте, порядок имеет значение. Взбить яичные белки и подмешать к ним сливки – совсем не то же самое, что сначала подмешать сливки к яичным белкам, а затем попытаться взбить полученную массу. В тех случаях, когда на самом деле порядок не важен, говорят, что преобразования **коммутируют**.

Предположим, что мы начинаем с преобразований S и T , которые являются симметриями шестигульного плиточного узора. Пусть U – некоторая плитка. Поскольку T – симметрия, каждая точка плитки U под действием преобразования T переходит в точку, принадлежащую некоторой другой плитке V . Поскольку S – симметрия, точки плитки V под действием преобразования S переходят в точки некоторой третьей плитки W . Соединяя все вместе, мы видим, что преобразование ST переводит точки плитки U в точки плитки W . Отсюда мы заключаем, что ST – симметрия, поскольку она тоже сохраняет плиточный узор.

Проверим это в нескольких простых случаях. В примере на левом фрагменте рисунка 11 оба преобразования S и T – сдвиги. На рисунке красными стрелками обозначено действие горизонтального сдвига T , который перемещает каждый шестиугольник на место его правого соседа, а оранжевыми стрелками – действие диагонального сдвига S , который сдвигает каждый шестиугольник по диагонали на один ряд вверх и полпозиции вправо. Чтобы выяснить, как действует композиция ST , мы выбрали зеленую плитку U и покрасили плитку $T(U)$ в розовый цвет. Затем мы нашли плитку $S(T(U))$ – она расположена на один ряд выше и полпозиции правее $T(U)$. Можно проверить, что, начав с любой другой плитки и проделав те же действия, мы получим тот же эффект. Иными словами, композиция ST есть сдвиг, обозначенный

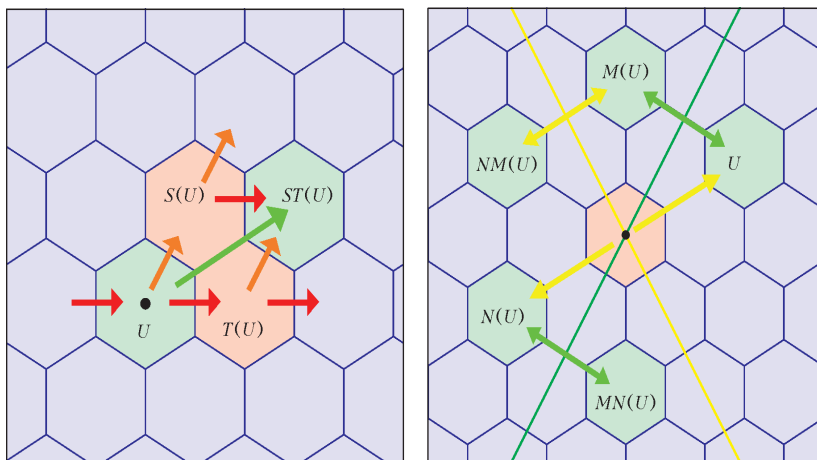


Рис.11. Слева: красными стрелками обозначен горизонтальный сдвиг T на одну позицию вправо, а оранжевыми – сдвиг S на одну позицию вверх по диагонали. Зеленая стрелка соответствует композиции ST , которая в этом случае совпадает с TS . Справа показаны два отражения: отражение M относительно зеленого зеркала и отражение N относительно желтого зеркала. Следя за тем, что происходит с одной плиткой (например, U), можно заметить, что композиция MN действует как поворот на 120° по часовой стрелке относительно точки пересечения зеркал, а композиция NM неожиданно оказывается поворотом против часовой стрелки

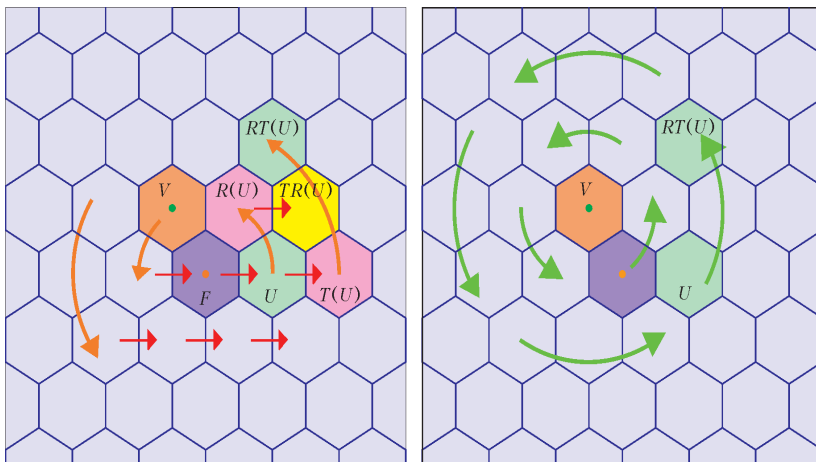


Рис.12. На левом фрагменте красными стрелками обозначен сдвиг T , а оранжевыми – поворот R . Проследив за судьбой зеленой плитки U сначала под действием TR , а затем под действием RT , мы видим, что на сей раз полученные плитки $T(R(U))$ и $R(T(U))$ различны, откуда заключаем, что TR не совпадает с RT . Глядя на правый фрагмент, вы можете убедиться, что RT – это поворот на 60° относительно центра другой плитки V !

зеленой стрелкой. Если бы мы строили композицию TS , которая переводит U сначала в $S(U)$, а затем в $T(S(U))$, мы получили бы ровно тот же результат. Отсюда можно заключить, что в этом случае $ST = TS$.

На первый взгляд, все просто, но иногда результат композиции оказывается неожиданным. На рисунке 12 преобразование T – тот же сдвиг, что и ранее. Но на сей раз в качестве второго преобразования рассмотрим поворот R на 60° против часовой стрелки относительно центра плитки F . Удивительным образом, композиция RT в этом случае также является поворотом на 60° , только относительно центра другой плитки V . На рисунке мы проследили за судьбой плитки U , которую подвергли сначала преобразованию T , а затем – преобразованию R . На левом фрагменте видно также, что плитка V под действием преобразования T сдвигается на одну позицию вправо, а затем под действием преобразования R возвращается в исходное положение. Попробуйте убедиться в том, что мы вас не обманываем, проследив за судьбой еще нескольких плиток под действием композиции RT .

Было бы интересно вывести общие правила, описывающие композицию ST двух симметрий S и T , но соответствующие рассуждения слишком длинны, чтобы приводить их здесь. Несколько примеров для изучения предложены в упражнении 1.

Упражнения

1. Строим композиции с помощью рисунка.

а) Вновь разберите пример, изображенный на рисунке 12 слева. На этот раз примените сначала отображение R , а затем T . Убедитесь, что TR – тоже поворот. Где находится его центр?

б) Используя ту же базовую решетку из шестиугольников, проследите за действием отражений N и M относительно двух зеркал, изображенных на рис.11. Проверьте утверждения про композиции NM и MN , сформулированные в подпункте к рисунку.

2. Формула для поворота. Мы хотим убедиться в справедливости формулы для поворота R на угол θ против часовой стрелки относительно начала координат:

$$R(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

В качестве простой проверки подставьте $\theta = 90^\circ$ и получите уже упоминавшееся правило $(x, y) \mapsto (-y, x)$ для этого поворота (рис. 9). Существует много способов проверить истинность общей формулы. Вот один из них:

Шаг 1. Проверьте, что формула правильно предсказывает судьбу точки $(1, 0)$. (Нарисуйте диаграмму!)

Шаг 2. Сделайте то же самое для точки $(0, 1)$.

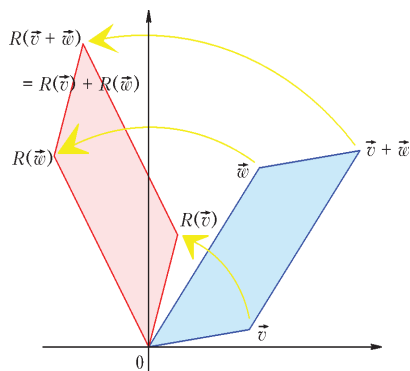


Рис.13. Наглядное объяснение, почему поворот R – линейное отображение. Он переводит вершины \vec{v} и \vec{w} голубого параллелограмма в вершины $R(\vec{v})$ и $R(\vec{w})$ розового параллелограмма. Точка $\vec{v} + \vec{w}$ – это вершина голубого параллелограмма, противоположная центру поворота 0 ; аналогично, $R(\vec{v}) + R(\vec{w})$ – это дальняя вершина розового параллелограмма. С другой стороны, поскольку R переводит голубой параллелограмм в розовый, дальняя розовая вершина должна совпадать с $R(\vec{v} + \vec{w})$.

Шаг 3. Докажите, что если \vec{v} – вектор, отложенный от начала координат, то $R(t\vec{v}) = tR(\vec{v})$ для любого вещественного числа t .

Шаг 4. Докажите, что если \vec{v} и \vec{w} – векторы, отложенные от начала координат, то

$$R(\vec{v} + \vec{w}) = R(\vec{v}) + R(\vec{w}).$$

Шаг 5. Объедините результаты, полученные в шагах 1–4, и выведите из них искомую формулу.

На первых двух шагах мы проследили за тем, что происходит с двумя базисными векторами $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Результат шага 3 говорит нам, что точка, лежащая на расстоянии t от

начала координат в направлении вектора \vec{v} , под действием отображения R переходит в точку, лежащую на том же расстоянии t от начала координат в направлении повернутого вектора $R(\vec{v})$, а результат шага 4 – что диагональ параллелограмма со сторонами, идущими вдоль векторов \vec{v} и \vec{w} , переходит в диагональ параллелограмма со сторонами, идущими вдоль векторов $R(\vec{v})$ и $R(\vec{w})$. Эти два факта означают, что поворот R есть **линейное** отображение, т.е. R переводит прямые в прямые. Шаг 4 наглядно проиллюстрирован на рисунке 13.

(Окончание следует)

Еще раз об аэродинамическом парадоксе

С. ТРАВИН

Я ОЧЕНЬ ЛЮБЛЮ ПЕРЕЧИТЫВАТЬ СТАРЫЕ КНИГИ. Когда по прошествии многих лет смотришь на еще незабытый текст новыми глазами – возникают интереснейшие наблюдения и размышления. Казалось бы, и раньше все было ясно и понятно, но иная расстановка акцентов может перевернуть картину вверх ногами.

Недавно мне попала под руку книга Л. Д. Ландау и А. И. Китайгородского «Физика для всех» (М.: Наука, 1974). Открыл ее на первой попавшейся странице и прочел следующее:

«... маленькие искусственные небесные тела – спутники – не находятся в таком идеальном положении: силы трения, пусть сначала очень незначительные, но все же чувствительные, решительно вмешиваются в их движение».

И чуть ниже, после нескольких незатруднительных формул:

«При наличии трения полная энергия будет падать, т.е. (поскольку она отрицательна) расти по абсолютной величине; расстояние R начнет уменьшаться: спутник снижается. Что при этом произойдет со слагаемыми энергии? Потенциальная энергия убывает (растет по абсолютной величине), кинетическая энергия растет. Общий баланс все же отрицателен, так как потенциальная энергия убывает вдвое быстрее, чем возрастает кинетическая. Трение приводит к возрастанию скорости движения спутника, а не к его замедлению».

Сказать, что приведенное рассуждение, известное как «аэродинамический парадокс», явилось для меня откровением, было бы неправдой – в разных редакциях и формулировках оно попадалось мне не один десяток раз. И никогда раньше даже сомнений не вызывало. Ну, это как бы очевидно – в гравитационном поле стационарные орбиты тем и характеризуются, что полная энергия тела равна его кинетической энергии, но только с противоположным знаком:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{GmM}{R} = -\frac{1}{2} E_{\text{п}} = -E_{\text{полн}}.$$

Значит, уменьшение полной энергии соответствует увеличению кинетической энергии, т.е. скорости тела.

Но что-то в этот раз «царапнуло» – такой явно претендующей на абсурд формулировки, как «трение приводит к возрастанию скорости», раньше не попадалось. Интуиция и весь накопленный жизненный опыт говорят о том, что вязкая среда – это враг скорости, она

может только тормозить тело, останавливать движение, «съесть» кинетическую энергию, уменьшать скорость. С другой стороны, есть закон сохранения энергии – вещь весьма серьезная. Это своего рода священное писание для любого верящего в физику. Горе тому, кто в этой истине хотя бы усомнится. Если ваши экспериментальные данные противоречат закону сохранения энергии – выкиньте их немедленно и никому про это не рассказывайте. Поэтому если полная энергия падает (на это трение и работает!), то кинетической энергии ничего не остается, как возрастать.

Ну, и как тут быть? Как может увеличиваться модуль скорости, если сила трения *всегда* направлена противоположно скорости? В ситуации без трения небесные тела могут веками сохранять свою скорость. Но вот внесли крохотное возмущение в идеальную систему – и получили эффект, противоположный воздействию? Такое бывает в организованных системах и известно как принцип Ле Шателье: система всегда отрабатывает так, чтобы за счет смещения равновесия максимально более полно компенсировать возмущающее воздействие. Однако *равновесие* подразумевает наличие как минимум двух процессов, идущих с одинаковыми скоростями, но в противоположных направлениях. С трением же игра всегда ведется «в одни ворота»: идет диссипация, т.е. рассеяние энергии, а взамен – ничего.

В ситуациях, когда разум отказывается служить верно и две половинки мозга готовы к непримиримой борьбе друг с другом, полезно начать с самых простых и несомненных аналогий, а затем постепенно наращивать сложность модели, постоянно проверяя себя на непротиворечивость.

Первая истина, которая вспоминается применительно к маневрированию при орбитальном движении, звучит так: «Хочешь быстрее – тормози». Именно так называется задача 22 из известного сборника П. В. Маковского «Смотри в корень» (М.: Наука, 1976). Там очень понятно и доступно объясняется, как, «притормозив», т.е. уменьшив орбитальную скорость спутника, можно добиться того, что он станет делать 12 оборотов в сутки вместо 10. Логика изложения настолько безупречна, что мы можем для себя «вбить первый гвоздь» и признать эти положения за безусловно истинные. Вот только досада – там речь идет о скорости в оборотах в сутки, а не в метрах в секунду. Иными словами, увеличивается угловая скорость, причем не просто угловая – *средняя* угловая скорость. Сама же угловая скорость при этом, очевидно, непос-

тоянна, поскольку спутник «сваливается» с круговой орбиты на эллиптическую. А его линейная скорость в перигелии будет в разы отличаться от минимального значения в афелии, и как ее усреднять – не очень понятно. Еще менее понятно – что дальше делать с такой «средней по витку» скоростью.

Дальнейшие литературные «раскопки» приводят к наглядной визуализации сказанного в решении упомянутой задачи. В брошюре Е.И.Бутикова «Движения космических тел в компьютерных моделях» (http://faculty.ifmo.ru/butikov/RussianMotion_1.pdf) приведен восхитительный рисунок (см. рис.1) со следующим пояснением:

«Чтобы обеспечить приближение зонда к поверхности планеты на заданную малую высоту, перигей Р его геоцентрической орбиты должен быть достаточно низким. Перевод зонда на такую орбиту может потребовать немалых затрат ракетного топлива. Наиболее экономичный способ получения орбиты с малой высотой перигея соответствует сообщению зонду дополнительной скорости в направлении, противоположном орбитальной скорости станции.»

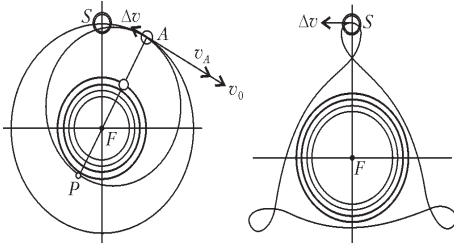


Рис.1. Космический зонд с периодом обращения, равным 2/3 периода станции: геоцентрическая эллиптическая орбита (слева) и замкнутая траектория движения зонда относительно станции (справа)

И опять никаких возражений здравого смысла и интуитивных ощущений против того, что следует из законов сохранения (на этот раз не только энергии, но и момента импульса). Среда рассматривается идеальной, вязкой. Зонд получает одномоментный «пинок» против скорости. Сохранив значения координат (в начальный момент они у зонда и у станции одинаковы), но потеряв в импульсе, зонд срывается с круговой орбиты на эллиптическую, ухитрится «нарезать» забавные загогулины вокруг станции, однако о систематическом *превышении* его скорости над скоростью станции никакой речи не идет. Разовый «пинок» против движения к увеличению кинетической энергии тела не приводит, а как же тогда постоянное трение о среду, которое можно рассматривать, как непрерывную череду «микропиночков», будет разгонять зонд? Что-то здесь не так!

Придется углубить литературные изыскания. Все-таки законы сохранения – инструмент мощный, но коварный. Может быть, даже избыточно мощный, чтобы быть наглядным и убедительным. Нам бы что-нибудь совсем простое, с разложением сил на нормальную и тангенциальную составляющие ... И чтобы

показать, *как* именно тело (зонд, спутник, станция) будет ускоряться в вязкой среде. И найти это ускорение по второму закону Ньютона:

$$\vec{R}' = \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{\vec{F}(\vec{R}, t)}{m}.$$

Разумеется, необходимый информационный ресурс нашелся – в третьем номере журнала «Квант» за 1998 год опубликована статья А.Митрофанова «Аэродинамический парадокс спутника». В статье приведен весьма детальный анализ сил с тем самым разложением по составляющим, о котором мы только что вспомнили. Собственно, сил, действующих на спутник, всего две: сила тяготения, всегда направленная к центру Земли, и сила сопротивления со стороны воздуха, всегда направленная против вектора мгновенной скорости. А вот угол между вектором скорости и радиусом-вектором спутника, направленным от земного центра (центра вращения), отклоняется от прямого на некую малую величину, которая рассчитывается... *опять* из баланса потенциальной и кинетической энергий. Рассматривается движение спутника по плавно закручивающейся к Земле спирали и утверждается, что спутник движется таким образом, чтобы все время проекция силы тяжести на направление мгновенной скорости ровно в два раза превышала значение силы сопротивления в воздух. Приведем кратко эти рассуждения. По моему убеждению, в них сокрыто хотя и выглядящее очень правдоподобно, но небесспорное допущение. Несколько позже я постараюсь максимально «локализовать» источник сомнений, а пока приведу фрагмент текста, с которым не готов согласиться без обсуждения:

«Запишем баланс полной энергии спутника в начале и в конце витка:

$$-\frac{mv^2}{2} - 2\pi R F_{\text{сопр}} = -\frac{m(v + \Delta v)^2}{2}.$$

Откуда, с учетом условия $\Delta v \ll v$, следует

$$\Delta v = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} R}{mv} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} \sqrt{R}}{m\sqrt{g}},$$

или

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}}}{mg}.$$

Поскольку продолжительность витка составляет $\Delta t = 2\pi R/v$, тангенциальное ускорение пролетающего в разреженной атмосфере спутника равно

$$a_{\tau} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} R}{mv} \frac{v}{2\pi R} = \frac{F_{\text{сопр}}}{m}.$$

Отсюда

$$F_{\tau} = ma_{\tau} = m \frac{F_{\text{сопр}}}{m} = F_{\text{сопр}},$$

что и требовалось установить. Итак, чем больше сопротивление, которое оказывает разреженный газ на спутник при его движении, тем быстрее увеличивается скорость спутника!»

Все бы хорошо, известно даже, как парусная яхта может лавировать галсами и двигаться, набирая скорость против ветра. Но ей необходим широкий киль и

вода, в тысячу раз более плотная, чем воздух, чтобы обеспечить противодействие боковому сносу судна и выделить только «соскальзывание» вдоль килля – примерно по биссектрисе между направлением ветра и направлением паруса. Но вот как ухитрится в невесомости и почти в вакууме обеспечить необходимую пропорцию сил искусственный спутник – по-прежнему неясно! Ну, если верить рассуждению, что в период всего снижения приведенные «балансы» сохраняются, – то ясно. А если мысленно поставить себя на место спутника – то нет. Разумеется, возражать против сохранения энергии не приходится. Однако откуда взялось равенство (с точностью до знака) кинетической и полной энергий? Сформулируем по-другому: почему модуль кинетической энергии *ровно* в два раза меньше, чем модуль потенциальной энергии? Иными словами, верно ли, что

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{GmM}{R},$$

или что центростремительная гравитационная сила равна центробежной:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2} ?$$

Вот здесь-то и происходит подмена понятий: сохранение энергии и баланс энергии. Одно дело – «священная корова», утверждающая, что работа сил трения за виток (или за любой иной удобный промежуток времени) *в точности* равна уменьшению полной энергии системы. Совсем другое – полагать, что эта работа равна удвоенному значению спада потенциальной энергии.

Итак, есть сильное подозрение, что центробежная сила *не обязательно* равна силе гравитации. Если допустить их равенство, то вылезает и «половинность» кинетической энергии по отношению к потенциальной и даже пресловутое двукратное превышение «стягивающей», т.е. направленной вдоль скорости, составляющей силы тяготения по отношению к силе трения. Естественно, если в модель заложить предположение, что лишь половина уменьшения гравитационной потенциальной энергии идет на компенсацию «вредной» работы сил трения, а вторая половина тратится на *противоестественный* (с житейской точки зрения) разгон тормозимого тела, тогда и все остальное придется признать истинным. Таким образом, мы вернулись в исходную точку: для того чтобы доказать увеличение скорости по мере *торможения*, необходимо и достаточно предположить, что центробежная сила равна центростремительной и что $Rv^2 = \text{const}$. Ну да, наши недостатки являются продолжением наших достоинств и наоборот. Сила предложенного рассуждения – в его неувязности. Слабость – в том, что на веру равно легко (или трудно) принять как исходный посыл, так и конечный результат, поскольку между ними есть прямая и разрушительная, глазу заметная связь.

Если внимательно присмотреться к тому, чем именно режим медленного сползания спутника в атмосфере отличается от его вечного движения в вакууме на больших высотах, то постулат о равенстве центробеж-

ной (или, если кому-то приятнее, центростремительной) силы и силы гравитационной перестает казаться столь уж очевидным. Для идеальной круговой орбиты – да, нет вопросов. Для эллиптической же орбиты (и тоже без вопросов) центробежная сила в афелии может во сколько угодно раз отличаться от силы гравитации. Разумеется, в меньшую сторону. Поэтому спутник и «клюет» вниз по сравнению с круговой орбитой. Потом он действительно разгоняется, и в перигелии требуется многократное превышение гравитационной силы над «средним по орбите» значением. Не будем забывать, что гравитационная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Посмотрим (мысленно), на постоянно уменьшающиеся в радиусе витки падающего из-за трения спутника. Они больше похожи на сдвинутые относительно центра окружности или на набор эллипсов (точнее, эллиптических дуг), где каждая текущая точка является афелием для мгновенной кривизны траектории, а в перигелий так никогда и не удастся долететь, поскольку даже противоположная по диаметру точка, с меньшим расстоянием для центра притяжения, будет *новым* афелием для продолжающегося сужения радиуса. Как именно аппроксимировать спиральное падение спутника в атмосфере – набором окружностей постепенно уменьшающегося радиуса или эллиптическими дугами, дело вкуса. Хотя выбор сильно неочевиден. Но в любом случае нужно постоянно помнить, что мгновенный радиус кривизны сужающейся траектории не равен расстоянию до центра притяжения, более того – направление на мгновенный центр вращения отличается от направления силы тяжести. Так что движение в поле центральных сил – это приятно и понятно, но с нашей задачей имеет лишь отдаленное сходство.

Будем считать, что я достиг промежуточной цели своего изложения, если хотя бы поколебал веру читателя в то, что центростремительное ускорение это и есть сила гравитации, деленная на массу спутника. Для круговых орбит это действительно так. Собственно, вращение по орбите и есть бесконечное падение в поле тяжести. Кривизна орбиты так и подбирается, чтобы за промежуток времени Δt «просадка» на величину

$$\Delta h = \frac{g(\Delta t)^2}{2}$$

в точности соответствовала отклонению окружности от прямой линии. Иными словами, падение в неинерциальной системе координат (а именно такой является система, привязанная к спутнику, движущемуся по круговой орбите) не приводит к уменьшению радиуса вращения. Если же мы хотим (хотя бы постепенно) «сползти» к меньшим радиусам, нам придется допустить наличие ненулевой радиальной скорости, а значит, и радиального ускорения. А для этого нужна результирующая сила, направленная к центру. Центробежная сила должна быть *меньше*, чем центростремительная (гравитационная). Пусть даже разница между ними мала, но она значима. Как будет видно из дальнейшего, эта поправка ровно той же степени малости, что и возмущающее воздействие силы трения о разреженную атмосферу. Поэтому пренебрегать ею ни в коем случае нельзя.

На рисунке 2 представлены силы, действующие на спутник, и их результирующая. Этих сил ровно две: гравитационная сила \vec{G} и сила сопротивления атмосферы $\vec{F}_{\text{трэн}}$. Можно сделать следующие заключения,

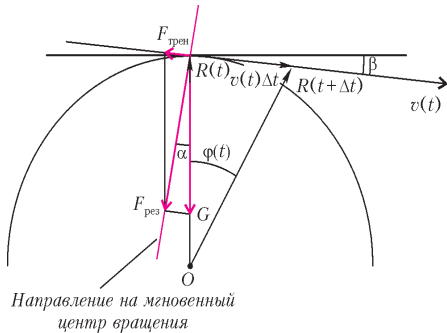


Рис.2. Кинематическая (черный цвет) и динамическая (красный цвет) схемы орбитального движения спутника

которые не требуют никаких дополнительных предположений и допущений:

- 1) гравитационная сила всегда направлена к центру Земли и обратно пропорциональна квадрату расстояния до него;
- 2) сила сопротивления всегда направлена против вектора мгновенной скорости;
- 3) результирующая сила направлена под углом α к вертикали (к направлению гравитации);
- 4) вектор скорости направлен под углом β к горизонту (перпендикуляр к вертикали), причем в общем случае $\alpha \neq \beta$.

Как именно будет вести себя спутник в разреженной атмосфере, определяется как раз значением угла β , под которым он «соскальзывает» относительно плоскости текущего горизонта. Понятно, что при $\beta = 0$, т.е. при отсутствии торможения в предельно разреженном воздухе, скорость спутника, равно как радиус его орбиты, кинетическая энергия, полная энергия и все остальные параметры изменяться не будут. Понятно также, что при $\beta = \pi/2$ спутник будет отвесно, «колом» наращивать свою скорость, разменивая гравитационную потенциальную энергию на кинетическую. При этом никакое даже самое сильное трение об атмосферу вертикальному падению не помеха, правда в таком случае придется принять начальную скорость орбитального движения равной нулю. Между этими двумя предельными случаями – все богатство вариантов реального торможения: от плавного снижения и приземления искусственного спускаемого аппарата до перехода в неуправляемый режим и сгорания в верхних слоях атмосферы.

Как будут развиваться реальные события? Беглый анализ показывает, что при $\beta > \alpha$ следует ожидать разгона, а при $\beta < \alpha$ – торможения. Поскольку мы подвергли сомнению баланс кинетической и потенциальной энергий (а до сих пор он был единственным источником наших суждений для расчета значения β), нам ничего не остается делать, как решать динамическую задачу «в лоб», т.е. написать уравнения движения и проинтегрировать их.

Прежде чем приступить к численному моделированию, необходимо сделать дополнительные предположения относительно величины силы сопротивления, т.е. трения о разреженный газ атмосферы. В общем случае сила сопротивления, действующая со стороны разреженного газа на спутник в верхних слоях атмосферы, определяется формулой

$$F_{\text{трэн}} = c_x S \frac{\rho v^2}{2},$$

где v – модуль значения скорости спутника, ρ – зависящая от высоты орбиты плотность атмосферы, S – площадь поперечного сечения спутника, c_x – безразмерный коэффициент сопротивления, который отражает степень передачи импульса от налетающей молекулы воздуха спутнику. Учитывая относительную редкость столкновения молекул воздуха с телом на орбите и то, что скорость собственного теплового движения молекул много меньше первой космической, этот коэффициент должен находиться в диапазоне от 2 (для неупругих столкновений) до 4 (для упругих). Обычно принимают, что в верхних слоях атмосферы $c_x = 2 - 2,5$. Большая точность обычно не требуется, поскольку ее влияние перекрывается воздействием других возмущающих факторов – таких, например, как солнечная активность, которая может в разы изменять плотность космического газа.

Наиболее «крутая» зависимость от высоты у плотности атмосферы. Строго говоря, необходимо вести интегрирование по высоте известной барометрической формулы

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\int_0^h \frac{g(h)M(h)}{\mathfrak{R}T(h)} dh\right).$$

Здесь M – средняя молярная масса смеси газов, составляющих атмосферу, T – абсолютная температура, g – ускорение силы тяжести, \mathfrak{R} – универсальная газовая постоянная, обозначенная готической буквой, чтобы не путать с радиусом орбиты. Поскольку все входящие в подынтегральное выражение переменные имеют весьма сложный профиль по высоте (особенно температура), численное интегрирование по этой формуле представляет собой довольно канительное занятие. По счастью, в большинстве приложений практической космонавтики и, тем более, в нашем рассмотрении можно использовать уже «усредненную» формулу, использующую понятие характерной толщины однородной атмосферы $H = \frac{\mathfrak{R}T_{\text{cp}}}{M_{\text{cp}}g_{\text{cp}}}$, т.е. высоты подъема, на которой давление падало бы в e раз:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right).$$

Удивительно, что характерная толщина атмосферы заметно увеличивается с высотой. Если в приземных слоях с подъемом на каждые 5 км давление и плотность воздуха падают вдвое, что соответствует

$H \approx 7$ км, то выше 120 км скорость убывания давления с высотой заметно уменьшается, главным образом из-за подъема температуры почти до полутора тысяч кельвинов. На высотах практической космонавтики порядка 300–500 км характерная толщина атмосферы составляет 30–50 км, причем, как покажут модельные расчеты, результат почти не зависит от выбора точного значения этого параметра.

Осталась самая малость – выписать уравнения динамики спутника в ближнем космосе. Поскольку нам нет надобности проводить привязку к конкретным координатам старта и финиша и мы хотим лишь проанализировать изменение скорости в ходе «торможения», можно позволить себе не следовать каноническим расчетам, описанным в учебниках по теории полета, а рассмотреть простейший случай вращения в центрально симметричном ньютоновом поле с малым возмущением в виде трения и провести все расчеты в двумерной (плоской) системе в полярных координатах. С учетом разложения сил и скоростей, изображенных на рисунке 2, уравнения движения примут вид

$$R'' = R\phi'^2 - \frac{GM}{R^2} + \frac{F_{\text{тр}} \sin \beta}{m},$$

$$\phi'' = \frac{1}{R} \left(\frac{F_{\text{тр}} \cos \beta}{m} - 2\phi'R' \right),$$

где сила трения рассчитывается по указанной раньше формуле с учетом зависимости плотности атмосферы от высоты.¹

Дальше совсем просто. Задаем постоянные (или условно постоянные) параметры – массу и радиус Земли, характерную толщину ее атмосферы, гравитационную постоянную, массу спутника и его поперечное сечение. Задаем также начальные условия: $t = 0$, $R = R_3 + h_0$, $\phi = 0$, скорость v равна первой космической для начального значения радиуса орбиты. Наконец, значения ρ_0 и H , необходимые для выбранной высоты, берем из справочника.

Теперь можно приступать к численному интегрированию. Эта задача почти не содержит в себе алгоритмических сложностей, поэтому ее можно считать без «изысков» – методом конечных разностей. Надо только взять шаг интегрирования Δt помельче, чтобы в окружности уместилось не менее 180 точек, т.е. чтобы за каждый шаг приращение угла не превышало двух градусов. Процедура счета в Excel включала последовательный расчет сначала вторых производных, затем первых производных, потом самих величин, исходя из приращений и значений на предыдущем шаге по времени. Такую табличку легко может составить даже начинающий пользователь Excel – единственное, за чем надо следить, это чтобы не было циклических ссылок. Еще одна маленькая тонкость – следует еще мельче

¹ Уравнения записаны в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\omega = \phi'$. Для тех читателей, что знакомы с этой системой, понятно, что в правой части первого уравнения присутствует центробежная сила инерции, а в правой части второго уравнения – сила Кориолиса. (Прим. ред.)

дробить шаг непосредственно перед срывом спутника «в штопор», если такой момент будет достигнут.

Приведем собственно результаты моделирования. На больших высотах (т.е. при низких плотностях) и (или) малых значениях парусности спутника ($S/m < 0,001$) спутник совершает циклическое движение и его траектория практически не отличается в пределах толщины линии на графике от первоначальной (неважно – круговой или эллиптической). Этот результат тривиален и может служить лишь для подтверждения того, что в алгоритм счета не вкралась ошибка. Более интересны результаты моделирования последних двух витков спутника. На рисунке 3 представлено движение очень «парусного» спутника, $S/m = 1$, начиная с высоты траектории 500 км. Мало реалистичное отношение площади к массе выбрано

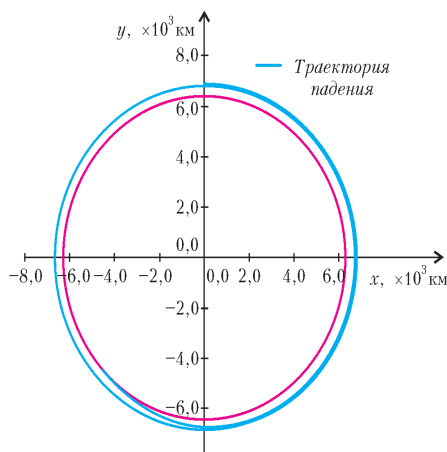


Рис.3. Моделирование последних витков падения спутника с 500 км

исключительно из соображений наглядности. Реальный спутник на выбранной высоте будет крутиться не менее 10 лет, совершая по 15 оборотов в сутки. Падать же – но по-прежнему за полтора витка! – он будет на существенно меньших высотах. Графическое представление такого падения не слишком наглядно, поскольку относительное уменьшение радиуса составит всего полпроцента ($h/R_3 \approx 0,005$). В нашем случае «сужение» орбиты достаточно наглядно. Движение начинается в верхней точке синей окружности и завершается через полтора витка в третьем квадранте, красным цветом показана поверхность Земли, $R = 6371$ км.

Теперь, наконец, мы можем удовлетворить свое любопытство – а что будет со скоростью? На рисунках 4 и 5 показана зависимость скорости спутника от времени и от высоты. Если не вглядываться в мелкие детали хода графиков, то наблюдается следующее: после практически неизменного по скорости снижения до высоты 330 км спутник начинает катастрофически терять скорость, при этом угол траектории к горизонту начинает стремительно нарастать. Заканчивает свою жизнь такой спутник практически в отвесном пиике, растеряв как потенциальную, так и кинетическую

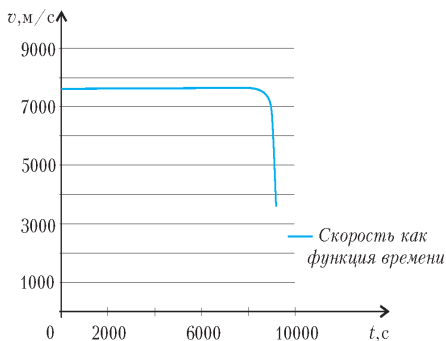


Рис.4. Скорость спутника как функция времени

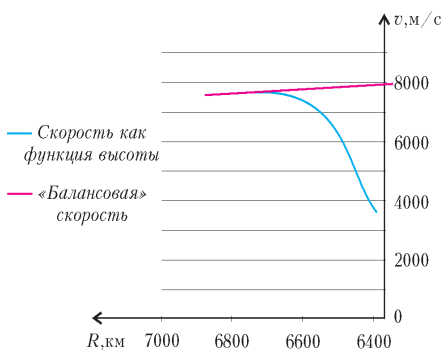


Рис.5. Скорость спутника как функция расстояния до центра Земли

энергию. Так же можно сказать и о перегрузках, которые к концу торможения (если только раньше спутник не сгорит от перегрева) достигают тысячекратного значения. Справедливости ради, следует отметить, что более пристальное разглядывание графиков показывает: перед более чем двукратным падением скорости имел место ее незначительный подъем – примерно на 46 м/с, или на 0,6%. Заметим, что если бы все происходило по «балансу энергий», то падение с высоты 500 км должно было бы привести к увеличению скорости спутника на 330 м/с. Расчет показывает потерю скорости примерно на 330 м/с. Иными словами, наблюдаемый эффект «разгона за счет торможения» не совпадает с модельными данными ни по значению, ни по знаку.

После столь впечатляющего отклонения расчетных данных от предсказания модели «баланса энергий» наступило самое время проверить себя – а с какими-нибудь данными наш расчет сходится? Оказывается, да. В качестве хрестоматийного источника истины в последней инстанции возьмем по-прежнему актуальную (хотя и ставшую библиографической редкостью) книгу П.Е.Эльясберга «Введение в теорию полета искусственных спутников Земли» (1965 года издания). В ней атмосферному торможению спутников посвящено целых две главы, причем, к моему удивлению (и радости), в этих главах нет апелляции к

балансу потенциальной и кинетической энергий. Напротив – приводятся весьма сложные расчеты, основанные на уравнениях движения и не избегающие численного решения. На рисунке 6, взятом из книги

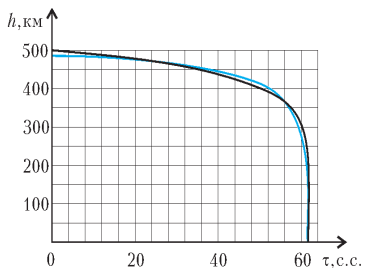


Рис.6. Зависимость высоты спутника от приведенного времени

Эльясберга, приведена зависимость (черная линия) высоты спутника h от приведенного времени τ , выраженного в средних солнечных сутках. Характерно, что после относительно спокойного существования спутнику предстоит резкий срыв с орбиты и падение. На этот же рисунок мы нанесли результаты своих расчетов – синяя линия. Видно хорошее совпадение данных нашей расчетной модели с данными из классической книги. В частности, совпадает высота «срыва» – примерно 330 км. Такое совпадение позволяет нам надеяться на то, что в нашей численной модели не слишком много грубых допущений.

Вернемся теперь к «атмосферному парадоксу». Его, оказывается, можно промоделировать (в том числе и с помощью нашей расчетной модели), если только предположить независимость трения от высоты (рис.7). Как бы трения нет, а есть слабенький маневровый реактивный двигатель, направленный против движения спутника. При этом мы также не обращаем внимания на такие «мелочи», как проникновение спиральной

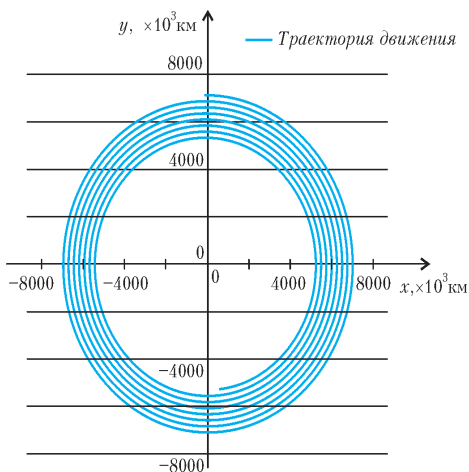


Рис.7. Спиральное движение спутника при постоянном трении

траектории ниже поверхности Земли. Тогда мы ощути-
мо можем разглядеть ускорение падающего спутника
(рис.8). Для того чтобы заметно, в разы, увеличить

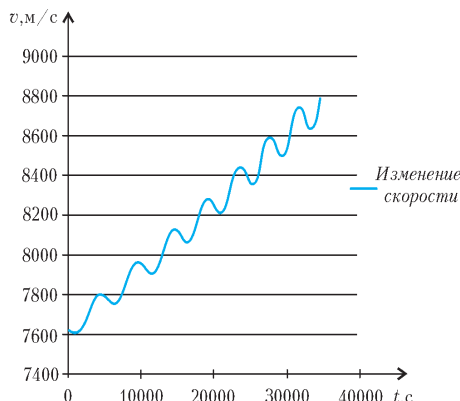


Рис.8. Нарастание скорости спутника во времени

скорость, нужно тоже в разы уменьшить радиус. Периодическая пульсация, соответствующая эллиптическому искажению первоначально круговой орбиты, возникает из-за того, что трение «включается» внезапно.

На самом деле не следует забывать, что у спутников, летающих на небольших высотах, величины угловой скорости и периода обращения меняются в сравнительно узких пределах. Так, при $h < 2000$ км период обращения не превосходит 2 ч 7 мин, а круговая скорость не убывает ниже значения 6,9 км/с. С другой стороны, длительное движение спутника на высоте $h < 100-150$ км практически неосуществимо из-за резкого возрастания влияния сопротивления воздуха. Этим высотам полета соответствуют минимально возможное значение периода обращения спутника по круговой орбите порядка 87 мин и максимальное значение круговой скорости полета приблизительно 7,85 км/с. Таким образом, у спутников, летающих на высотах $h < 2000$ км, период обращения колеблется в пределах от 1 ч 27 мин до 2 ч 7 мин, а скорость полета — от 6,9 км/с до 7,85 км/с.

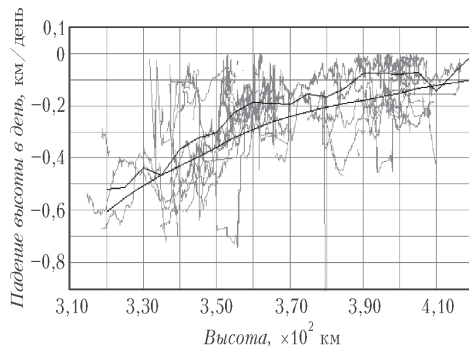


Рис.9. Реальные данные, полученные МКС «Мир»

В заключение нашего экскурса в мир искусственных спутников совершенно необходимо помимо расчетно-модельных данных привести «настоящие», фактические. На рисунке 9 представлены данные, полученные незадолго до затопления Международной космической станции «Мир» (www.whiteworld.ru/gubriki/000108/01030501.pdf). По вертикали отложено реальное падение высоты за день за все время наблюдения станции «Мир», по горизонтали — высота. Ломаная черная линия — результат проведенного усреднения, гладкая черная линия — расчет темпа падения станции по стандарту атмосферы (с «узаконенными» профилями температуры и плотности по высоте). Видно, что фактическое поведение тормозящегося объекта значительно сложнее предсказаний любой модели и подвержено воздействию большого количества случайных, а значит, несогласованных факторов. Разброс экспериментальных данных относительно среднего значения превышает двукратный. Тем самым, даже модель, основанная на общепринятом стандарте атмосферы, выглядит несколько упрощенной по сравнению с реальным поведением объекта.

Так как же быть с «аэродинамическим парадоксом»? Он есть или его нет? Разумеется, он есть! Он реально существует в массовом сознании всех, изучающих небесную механику.

Никола Тесла

Е. ФИСКИНД, К. КОРНИСИК

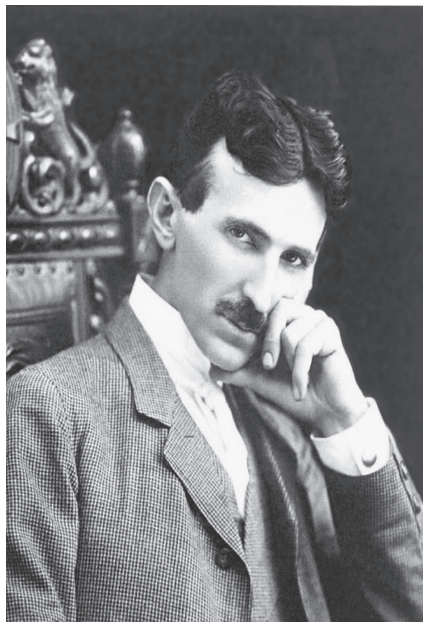
«НЕТ ПРЕДМЕТА БОЛЕЕ ЗАХВАТЫВАЮЩЕГО, БОЛЕЕ ДОСТОЙНОГО ИЗУЧЕНИЯ, ЧЕМ ПРИРОДА. ПОНЯТЬ ЭТОТ ВЕЛИКИЙ МЕХАНИЗМ, ОБНАРУЖИТЬ СИЛЫ, КОТОРЫЕ В НЕМ РАБОТАЮТ, И ЗАКОНЫ, ИМИ УПРАВЛЯЮЩИЕ, – ВОТ ВЕЛИЧАЙШАЯ ЦЕЛЬ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО РАЗУМА», – ТАК СЧИТАЛ ВЫДАЮЩИЙСЯ УЧЕНЫЙ Н. ТЕСЛА.

Никола Тесла родился 10 июля 1856 года в селе Смиляны в Хорватии. Его отец, сербский православный священник, был образованным и одаренным человеком, хорошо знающим литературу, философию и естественные науки. Мать, по воспоминаниям Теслы, «не умела ни читать, ни писать, но была умна и практична: смастерила множество приспособлений, облегчавших домашний труд». Редкие способности Никола и интерес к технике проявились еще в годы обучения в начальном реальном училище. Впоследствии ученый вспоминал, как, познакомившись с описанием и фотографией尼亚гарского водопада, он заявил: «Вырасту, поеду в Америку и заставлю Ниагару работать!» И действительно, через 30 лет Тесла осуществил проект первой в мире гидроэлектростанции.

В период с 1871 по 1878 год юноша получает образование сначала в реальном училище, а затем в Высшей технической школе в Граце (Австрия). На лекциях по электротехнике он убеждается в несовершенстве электрических машин постоянного тока и ставит перед собой задачу создания электродвигателя переменного тока. Решение пришло спустя четыре года, в течение которых молодой инженер работал в различных телеграфных компаниях, слушал лекции в Пражском университете, участвовал в разработке проекта городской телефонной сети в Будапеште и сделал несколько изобретений в области телефонии.

В 1882 году в Будапеште Тесла приходит к идее вращающегося магнитного поля. Эффект вращения магнитного поля создается двумя катушками, в которых циркулируют переменные токи с фазовым сдвигом $\pi/2$. При суперпозиции магнитных полей таких токов формируется стационарное поле, которое вращается с угловой скоростью, пропорциональной частоте токов. Принцип вращающегося магнитного поля был положен ученым в основу разнообразных конструкций многофазных электродвигателей и генераторов переменного тока. Эти работы впоследствии способствовали кардинальному изменению мировой энергетики и электротехники, связанному с переводом электрических машин с постоянного тока на переменный.

Впрочем, переворот в электротехнике произошел гораздо позже. Работа в Европе, а затем в США, где ученый начинал в качестве сотрудника Томаса Эдисона, сформировала хорошую репутацию Теслы в электротех-



нических и деловых кругах, однако отнюдь не способствовала реализации его новых идей. Электротехника, бурно развивавшаяся в те годы прежде всего на патентах Эдисона, полностью базировалась на постоянных токах – великий изобретатель был убежден, что у переменного тока нет будущего. Лишь в 1887 году Тесла получил материальную возможность создать серию многофазных электрических машин. Испытания, проведенные в Корнеллском университете, показали, что двухфазные моторы имеют КПД не ниже двигателей постоянного тока, обладая при этом значительной простотой.

Созданная ученым теория систем передачи энергии с помощью переменного тока и конструкции ученого разнообразных асинхронных двигателей легли в основу почти 30 патентов, полученных им в одном только 1888 году. Триумфом изобретателя стала лекция «Новая система двигателей переменного тока и трансформаторов», прочитанная в Американском институте электроинженеров 16 мая 1888 года. Она была опубликована в электротехнических журналах многих стран и принесла Тесле мировую известность. Являясь научным консультантом одной из ведущих американских электротехнических компаний, Тесла проводит многочисленные исследования, способствующие техническому перевооружению энергетики. В частности, ему принадлежит выбор значения стандартной для США промышленной частоты переменного тока – а именно 60 Гц.

Теоретические работы Джеймса Максвелла, эксперименты Генриха Герца и Оливера Лоджа с электромагнитными волнами повлияли на научные интересы Теслы в области высоких частот. В 1889 году Тесла конструирует генератор переменного тока частотой 10 кГц, статор которого состоит из 384 магнитных полюсов. Изучая

далее электрические системы, работающие при частотах выше 20 кГц, ученый приходит к выводу о возможности передачи электроэнергии высокочастотными токами. В 1891 году он создает высокочастотный трансформатор, названный впоследствии резонанс-трансформатором Теслы. Это устройство состоит из двух функциональных частей. Первая включает индукционную катушку (катушку Румкорфа), батарею конденсаторов переменной емкости, первичную катушку колебательного контура и искровой разрядник. Колебательный контур в момент искрового пробоя формирует электромагнитные колебания, частота которых определяется емкостью конденсаторов и общей индуктивностью катушек. Другая часть трансформатора состоит из вторичной многovitковой катушки, антенны и заземления, представляя, таким образом, открытый колебательный контур. Действие трансформатора основано на настройке в резонанс его первичного и вторичного контуров. При резонансной частоте, составлявшей от нескольких десятков килогерц до мегагерц, напряжение на выходе достигало миллиона вольт. Таким образом, резонанс-трансформатор по сути явился первым радиопередающим устройством. Это изобретение позволяет считать Теслу одним из пионеров радиотехники.

При создании резонанс-трансформатора ученому пришлось решать несколько практических задач. Например, необходимо было найти изоляцию для катушек сверхвысокого напряжения. Тесла исследует явление пробоя диэлектриков и находит, что лучший способ изоляции витков катушек это погружение их в минеральное масло, которое с тех пор стали называть трансформаторным. Другая проблема, блестяще решенная Теслой, заключалась в обеспечении изоляции высоковольтной вторичной обмотки трансформатора от низковольтной первичной. Для этого была взята вторичная катушка размером в четверть длины волны. При резонансе на одном конце провода возникает пучность стоячей волны (с потенциалом до мегавольта), а на другом – узел, и провод остается электрически нейтральным. Тогда его можно либо подсоединить непосредственно к первичной катушке, либо заземлить.

Получение сильных электромагнитных полей позволило Тесле осуществить разнообразные экспериментальные исследования свойств высокочастотных колебаний, их воздействия на вещество, главным образом на разреженный газ. Эти опыты, сопровождающиеся возникновением свечения при различных видах газового разряда, были чрезвычайно эффектны и поражали современников. Бесспорно, исследования Теслы в области высокочастотного газового разряда оказали большое влияние на развитие люминесцентной светотехники. Его опыты по наблюдению фосфоресценции при плавлении металлов в вакууме под воздействием высокочастотного поля по сути явились прообразом ионного проектора, созданного в 1951 году Эрвином Мюллером. Открытие Теслой индукционного нагрева материалов впоследствии легло в основу современной электрометаллургии и бытовой микроволновой техники.

Ученый впервые установил безопасность для человека высокочастотных колебаний, связанных со скин-эффек-

том, и указал на целесообразность использования высоких частот в медицине. В частности, дошедшая до наших дней физиопроцедура дарсонвализации – физиотерапевтического воздействия на поверхностные ткани и слизистые оболочки организма импульсными токами высокого напряжения и малой мощности – была им проведена на собственном теле.

После открытия Вильгельмом Рентгеном X-лучей Тесла проводит обширные исследования методов их получения, свойств излучения, способов защиты от него. В этой связи любопытна следующая деталь. В лекции, прочитанной в Нью-Йоркской академии наук в 1897 году, Тесла, признавая бесспорный приоритет Рентгена, выразил сожаление по поводу того, что раньше, работая с трубками Крукса, не смог понять причину засвечивания закрытых фотоластинок.

В последующие годы основные усилия ученого были сосредоточены на проблеме передачи потоков энергии с помощью электромагнитных волн. Согласно его концепции, волны, соответствующие резонансной частоте колебаний Земли (порядка 10 Гц), способны переносить огромные потоки энергии на сколь угодно большие расстояния. Эта идея была подвергнута серьезной критике, тем более что она не могла быть проверена из-за отсутствия возможности получения таких длинноволновых электромагнитных колебаний. Следует отметить, что идеи Теслы, связанные с передачей энергии, базировались на ряде теоретических положений, отвергнутых в XX веке физической наукой, в частности – на концепции мирового эфира. Все это привело к определенному отчуждению ученого от физического сообщества в последние десятилетия его жизни (он умер в 1943 году). С другой стороны, идеи Теслы о неисчерпаемости энергетических запасов мирового эфира были взяты на вооружение идеологами паранауки. Однако сегодня мы должны четко представлять роль Теслы в развитии энергетики, электро- и радиотехники, отделяя его большие заслуги от различных спекуляций квазинаучного характера.

Бесспорно, Никола Тесла был выдающимся изобретателем, инженером, автором проекта первой в мире гидроэлектростанции. Среди его многочисленных изобретений электрический счетчик, частотомер, системы радиуправления механизмами и другие приборы. Интересно отметить, что Тесла обладал феноменальной способностью осуществлять мысленные эксперименты, воспроизводящие все детали и характеристики будущего устройства. Однако сфера его деятельности не ограничивалась техникой, он был блестящим физиком-экспериментатором, работы которого во многом определили развитие ряда направлений прикладной физики XX века.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2011» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2229» или «Ф2235». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvantjournal.ru и phys@kvantjournal.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2229, M2230, M2232–M2235 предлагались на XXXII Турнире городов.

Задачи M2229–M2235, Ф2235–Ф2242

M2229. По кругу написаны 2010 чисел в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух соседних чисел четна.

Б. Френкин

M2230. Грани выпуклого многогранника – подобные треугольники. Докажите, что многогранник имеет две пары равных граней (одну пару равных граней и еще одну пару равных граней).

В. Произволов

M2231. Решите в натуральных числах уравнение $x^x = y^{3y}$.

И. Богданов, В. Сендеров

M2232. В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечетное число главных дорог.

А. Шень

M2233. Дан остроугольный треугольник ABC ; AA_1 , BB_1 – его высоты. Из точки A_1 опустили перпендикуляры на стороны AC и AB , а из точки B_1 опустили перпендикуляры на стороны BC и BA . Докажите, что основания перпендикуляров образуют равнобокую трапецию.

Г. Фельдман

M2234. В пространстве с декартовой системой координат дан прямоугольный параллелепипед, вершины которого имеют целочисленные координаты. Его объем

равен 2011. Докажите, что ребра параллелепипеда параллельны координатным осям.

М. Малкин

M2235. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 11 всем известных гениев. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает прием, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять 10 гениев, как бы ни действовала первая фирма?

А. Шаповалов

Ф2235. По прямой дороге с постоянной скоростью v едет автомобиль. В некоторый момент времени автомобиль приближается к неподвижному наблюдателю со скоростью u ($u < v$). Через промежуток времени t после этого момента автомобиль оказывается ближе всего к наблюдателю. На каком расстоянии L от дороги находится наблюдатель?

А. Козлевич

Ф2236. При стрельбе из игрушечного оружия пластиковыми шариками было установлено, что в пенопласт плотностью 40 кг/м^3 шарики углублялись в среднем на 15 мм, если выстрелы производились с малого расстояния – меньше 10 см. Если стрелять с дальности 6 м, то шарики застревают в пенопласте в среднем на глубине 3 мм. На какую глубину в среднем будут погружаться шарики в пенопласт, если стрелять с расстояния 2 м? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шарика,

а сила сопротивления при движении шарика в пенопласте постоянна.

С.Найнер

Ф2237. Масса пружины распределена равномерно по ее длине, начальная длина равна 1 м. Пружина «поджата» однородно, т.е. длина всех ее витков начинает одинаково увеличиваться при приложении к концам пружины двух противоположно направленных и равных по величине сил, причем только если их величины не меньше 100 Н. При еще больших величинах сил изменение размеров пружины описывается законом Гука $k\Delta L = F$, где жесткость пружины $k = 500$ Н/м. Пружину потянули только за один конец вдоль ее оси с силой 200 Н. Считая, что эксперимент происходит в космосе, найдите установившуюся длину пружины.

В.Сергеев

Ф2238. Планета состоит из однородного жидкого вещества, ускорение свободного падения на ее поверхности равно g . Найдите давление в центре этой планеты и в точке внутри объема, от которой до точек на поверхности планеты минимальное расстояние в N раз меньше максимального расстояния. Собственного вращения планеты по отношению к далеким звездам нет, атмосфера на планете отсутствует.

С.Варламов

Ф2239. Полярники в Антарктиде пробурили в толстом слое льда, покрывающего землю, глубокую скважину и опустили в нее лампочку накаливания мощностью 1000 Вт и пластиковую трубку для откачивания жидкой воды, получающейся в результате таяния льда. Лампочка посылает свет равномерно по всем направлениям. Лед мутный, и свет целиком поглощается в слое небольшой толщины – меньше 1 см. На той глубине, где находится лампочка, в толще льда температура постоянна и равна -10 °С. Теплопроводность льда составляет $2,2$ Вт/(К·м). Через большое время размеры оттаявшей области, которая имеет форму шара (лампочка в его центре), установились. Каков радиус этого шара?

В.Славутинский

Ф2240. На уроках химии положено производить четырехкратный обмен воздуха за час (урок). Обеспечивается это с помощью вентиляции. Температура воздуха в классе должна быть не ниже $+20$ °С. Каждый школьник греет воздух, выделяя мощность 100 Вт. При каком количестве школьников в классе не потребуются дополнительного обогрева помещения, если температура воздуха снаружи $+15$ °С? Потери тепла через стенки и окна можно пренебречь, объем воздуха в классе равен примерно 200 м³.

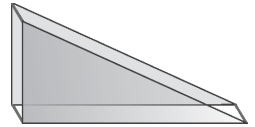
Фольклор

Ф2241. На горизонтальном столе лежит открытая с двух концов тонкая стеклянная трубка – капилляр с диаметром отверстия менее 0,2 мм. Длина трубки 1 м. На стол пролили чернила, и один из концов трубки оказался в луже чернил. Капилляр начинает втягивать в себя чернила, и в тот момент, когда заполнилась $1/10$ часть длины трубки, скорость движения границы

(чернила–воздух) в капилляре составила 1 см/с. Через какое время трубка окажется полностью заполненной чернилами?

А.Зильберман

Ф2242. В космосе находятся две одинаковые заряженные непроводящие и параллельные друг другу жесткие пластины треугольной формы. Чтобы они не соприкасались, между ними вблизи углов пластин, которые равны 30° , 60° и 90° , установлены три маленьких одинаковых непроводящих стерженька (см. рисунок). На поверхностях пластин равномерно распределены заряды $+3Q$ и $-2Q$. С какими силами сжаты стерженьки? Площади треугольников равны S , расстояния между пластинами (длина стерженька) много меньше их линейных размеров.



С.Дмитриев

Решения задач M2206–M2211, M2213¹ Ф2220–Ф2227

M2206. а) Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой машины. В некоторый момент на участке сохватались и послали своего лучшего полицейского на поимку угонщика, дав ему новую полицейскую машину. Однако полицейский не знал, ни когда машина была угнана, ни в какую сторону вдоль бесконечной в обе стороны дороги уехал угонщик. Сможет ли полицейский догнать угонщика? б) Решите ту же задачу, если от полицейского участка отходят бесконечные дороги в N направлениях.

а) **Ответ.** Сможет.

Пусть полицейский выезжает в 12.00 и едет «вправо» в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал не позже 11.00 (т.е. едет 9 часов). Если полицейский еще не догнал угонщика, он разворачивается и едет «влево» в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал не позже 10.00 (поскольку скорость полицейского больше, это время конечно). Затем он разворачивается и едет «вправо» в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал не позже 9.00. И так далее.

б) **Ответ.** Сможет.

Обобщим стратегию, предложенную выше. Пусть полицейский выезжает в 12.00 и едет в первом направлении в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал по этому направлению не позже 11.00. Далее он разворачивается, едет до полицейского участка и далее едет по второму направлению в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот

¹ Решению задачи M2212 будет посвящена отдельная заметка в одном из ближайших номеров журнала.

выехал во втором направлении не позже 10.00. Продолжаем аналогично, меняя направления дорог от полицейского участка по циклу $1 - 2 - \dots - N - 1 - 2 - \dots$, и каждый раз «фору» по времени увеличивая на 1 час. Интересно, что можно догнать угонщика даже в том случае, если изначально от полицейского участка отходят дороги в бесконечном числе направлений, занумерованных натуральными числами. Читатель может подумать, как действовать полицейскому в таком случае.

Г. Гальперин

M2207. Квадратная доска разделена на n^2 клеток $n - 1$ горизонтальными и $n - 1$ вертикальными прямыми. Клетки раскрашены в шахматном порядке. Известно, что на одной диагонали все клетки черные и квадратные. Докажите, что общая площадь всех черных клеток не меньше общей площади всех белых.

Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_n длины сторон квадратных диагональных клеток. Тогда x_1, x_2, \dots, x_n — это ширины полос, на которые вертикальные (или горизонтальные) прямые разбивают доску. Заметим, что площадь клетки на пересечении i -й горизонтали и j -й вертикали равна $x_i x_j$, причем если $i + j$ четно, то клетка черная, иначе — белая.

Если в произведении $(x_1 - x_2 + x_3 - \dots)^2$ раскрыть скобки, то получится сумма n^2 слагаемых вида $\pm x_i x_j$, где знак «+» выбирается, если $i + j$ четно, а знак «-» выбирается, если $i + j$ нечетно. Таким образом, неотрицательная величина $(x_1 - x_2 + x_3 - \dots)^2$ равна разности между суммами площадей всех черных и всех белых клеток.

П. Кожевников

M2208. Имеется многоугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2.

Каждая сторона меньше суммы остальных, поэтому сумма остальных больше полупериметра. Значит, заменив каждый знаменатель на полупериметр, мы увеличим сумму. Но теперь эта сумма стала равна 2.

Л. Медников, А. Шаповалов

M2209. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова окажутся одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее N^2 встреч.

Пусть S — длина трека, $v_1 < v_2 < \dots < v_{2N}$ — скорости велосипедистов, $u = \min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \dots, v_{2N} - v_{2N-1}\}$. Велосипедисты с номерами $i < j$ встречаются через промежутки времени $\frac{S}{v_j - v_i}$. Ясно, что самый боль-

шой из промежутков равен $\frac{S}{u}$, и нам придется ждать до конца этого промежутка, чтобы каждый велосипедист встретился со всеми остальными. Поскольку

$v_j - v_i \geq (j - i)u$, то за время $\frac{S}{u}$ велосипедисты с номерами i и j успеют встретиться не менее $j - i$ раз. Рассмотрим k -го велосипедиста, где $k \leq N$. У него будет не менее $1 + 2 + \dots + (k - 1)$ встреч с теми, у кого скорость меньше, и не менее $1 + 2 + \dots + (2N - k)$ встреч с теми, у кого скорость больше. Итого, будет не менее

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + \dots + (k - 1)) + \\ & + (1 + 2 + \dots + N + (N + 1) + \dots + (2N - k)) \geq \\ & \geq (1 + 2 + \dots + (k - 1)) + \\ & + (1 + 2 + \dots + N + (N - 1) + \dots + k) = \\ & = (1 + 2 + \dots + (k - 1) + k + \dots + (N - 1)) + \\ & + (1 + 2 + \dots + N) = N + (1 + (N - 1)) + \\ & + (2 + (N - 2) + \dots + ((N - 1) + 1)) = N^2 \end{aligned}$$

встреч.

При $k \geq N + 1$ оценка на количество встреч получается так же.

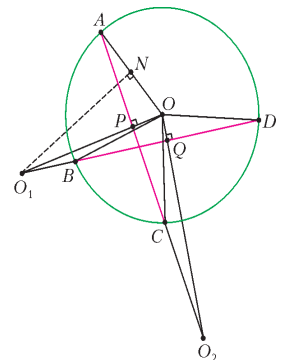
Б. Френкин

M2210. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O , причем точка O не лежит ни на одной из диагоналей этого четырехугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника AOC лежит на прямой BD . Докажите, что центр описанной окружности треугольника BOD лежит на прямой AC .

Пусть R — радиус окружности с центром O , P — середина AC , Q — середина BD , O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников AOC и BOD соответственно (см. рисунок). Так как треугольники AOC и BOD — равнобедренные, то O_1 и O_2 лежат на прямых OP и OQ соответственно.

Опустим перпендикуляр O_1N на радиус OA . Ясно, что N — это середина отрезка OA . Из подобия треугольников AOP и O_1ON получаем $OP : OA = ON : OO_1$, т.е. $OP \cdot OO_1 = \frac{R^2}{2}$. Аналогично, $OQ \cdot OO_2 = \frac{R^2}{2}$. Поэтому $OP : OQ = OO_2 : OO_1$, значит, треугольники $OP O_2$ и $OQ O_1$ подобны (угол при вершине O у них общий). По условию угол $OQ O_1$ прямой, следовательно, и угол $OP O_2$ прямой, что и требовалось доказать.

Замечание. Прямые AC и BD — полярны соответственно



точек O_1 и O_2 относительно окружности радиуса $\frac{R}{\sqrt{2}}$ с центром O . Поэтому утверждение задачи следует из известной теоремы: если точка X лежит на поляре точки Y , то точка Y лежит на поляре точки X . Фактически выше приведено одно из доказательств этой теоремы.

Л.Медников, А.Шаповалов

M2211* Квадрат $ABCD$ разрезан на одинаковые прямоугольники. Покрасим все прямоугольники, которые разрезает диагональ AC . Докажите, что AC делит площадь покрашенной части квадрата пополам.

Пусть сторона квадрата равна d , а прямоугольники имеют размер $a \times b$, $a \leq b$. Введем прямоугольную систему координат так, что вершины A и C – это точки $(0, d)$ и $(d, 0)$. Докажем следующее **утверждение**: количество прямоугольников, лежащих целиком под диагональю AC , не зависит от разбиения квадрата на прямоугольники (т.е. зависит только от чисел a, b, d). Доказав это, можем поменять ролями вершины B и D и получить, что это количество равно количеству прямоугольников, лежащих целиком над диагональю. Из равенства количеств прямоугольников, лежащих целиком под диагональю и целиком над диагональю сразу будет следовать утверждение задачи.

Доказательство утверждения. Обозначим через $l(c)$ отрезок прямой $x + y = c$ (т.е. прямой, параллельной диагонали AC), по которому она пересекает квадрат ($c \in [0, 2d]$). Для каждого прямоугольника Π введем параметр $t(\Pi)$ – сумму абсциссы и ординаты его левой нижней вершины. Как легко видеть, прямоугольник с параметром $t(\Pi) = t$, независимо от того, как он расположен, пересекает отрезок $l(c)$ только в том случае когда $c \in [t, t + a + b]$ (см. рисунок). При этом если $c \in [t, t + a]$, то прямоугольник пересекает $l(c)$ по отрезку длины $\sqrt{2}(c - t)$; если $c \in [t + a, t + b]$, то прямоугольник пересекает $l(c)$ по отрезку длины $\sqrt{2}a$; если $c \in [t + b, t + a + b]$, то прямоугольник пересекает

$l(c)$ по отрезку длины $\sqrt{2}(t + a + b - c)$. Ясно, что Π лежит ниже диагонали AC тогда и только тогда, когда $t(\Pi) \leq d - a - b$. Занумеруем все прямоугольники разбиения в порядке возрастания параметров: $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$, так что $t(\Pi_1) \leq t(\Pi_2) \leq \dots \leq t(\Pi_n)$. Покажем, что упорядоченный набор параметров $t(\Pi_1), t(\Pi_2), \dots, t(\Pi_n)$ не зависит от способа разбиения квадрата на прямоугольники (т.е. зависит только от d, a, b). Отсюда будет следовать нужное утверждение о том, что количество прямоугольников Π , для которых $t(\Pi) \leq d - a - b$, не зависит от способа разбиения.

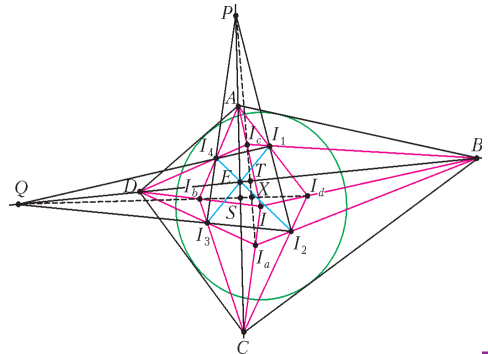
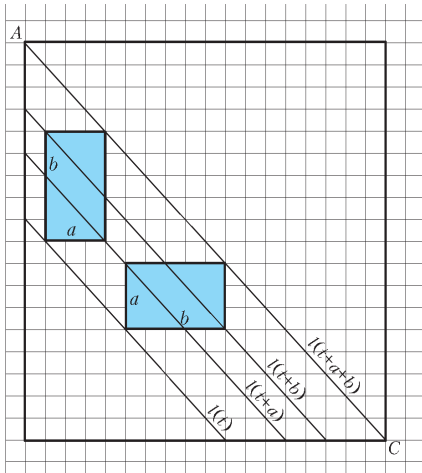
Рассуждаем по индукции. Очевидно, $t(\Pi_1) = 0$. Предположим, что $t(\Pi_1), t(\Pi_2), \dots, t(\Pi_k)$ нам известны. Тогда для каждого $c \in [0, 2d]$ известна сумма длин отрезков, по которым прямоугольники $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ пересекают $l(c)$. Тем самым известно, покрывают ли эти прямоугольники целиком отрезок $l(c)$. Но тогда следующий по величине параметр $t(\Pi_{k+1})$ однозначно должен равняться максимальному c , для которого соответствующий отрезок $l(c)$ целиком покрыт прямоугольниками $t(\Pi_1), t(\Pi_2), \dots, t(\Pi_k)$.

Замечание. Можно доказать (в том числе используя идею приведенного решения), что разбиение квадрата на прямоугольники $a \times b$ возможно, только если отношение $\frac{a}{b}$ рационально.

П.Кожевников, Л.Медников, А.Шаповалов

M2213* В описанном четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E , через I_a, I_b, I_c, I_d обозначены центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB, ABC . Докажите, что точка пересечения прямых $I_a I_c$ и $I_b I_d$ равноудалена от центров окружностей, вписанных в треугольники ABE, BCE, CDE, DAE .

Так как четырехугольник $ABCD$ описанный (см. рисунок), то окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD , касаются BD в одной точке T (действительно, расстояния от точки B до точек касания с окружностями, вписанными в треугольники ABD и CBD , равны $\frac{AB + BD - AD}{2}$ и $\frac{CB + BD - CD}{2}$ соответственно; но эти величины равны, так как $AD + BC = AB + CD$). Тогда $T = I_a I_c \cap BD$ и $I_a I_c \perp BD$.



Аналогично, пусть $S = I_b I_d \cap AC$, тогда $I_b I_d \perp AC$. Обозначим через I_1, I_2, I_3, I_4 центры окружностей, вписанных в треугольники ABE , BCE , CDE и DAE соответственно, а через I – центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$. Пусть $P = AC \cap I_a I_c$ (если AC не параллельна $I_a I_c$), $Q = BD \cap I_b I_d$ (если BD не параллельна $I_b I_d$). Так как точки $I = AI_c \cap CI_a$, $I_d = AI_1 \cap CI_2$ и $B = I_1 I_c \cap I_2 I_a$ лежат на одной прямой (биссектрисе угла ABC), то по теореме Дезарга прямая $I_1 I_2$ проходит через P либо параллельна прямой AC и $I_a I_c$. Аналогично, $I_3 I_4$ проходит через P либо параллельна прямой AC и $I_a I_c$. Таким же образом $I_2 I_3$ и $I_4 I_1$ проходят через Q либо параллельны прямой BD и $I_b I_d$.

Нам потребуется следующая известная

Лемма. Пусть E – точка на стороне треугольника ABC ; I_1, I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABE и CBE ; S – точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC , со стороной AC . Тогда точки I_1, I_2, E, S лежат на одной окружности.

Доказательство. Так как EI_1 и EI_2 – биссектрисы углов AEB и BEC , то $\angle I_1 E I_2 = 90^\circ$. Как известно, через точку S проходит общая внутренняя касательная SZ к окружностям, вписанным в треугольники ABE и CBE (это утверждение является частным случаем задачи 2 – для вырожденного описанного четырехугольника $ABCS$ – из статьи «Описанные четырехугольники и ломаные» в «Кванте» №1 за 2010 г.). Тогда SI_1 и SI_2 – биссектрисы углов ASZ и CSZ , значит, $\angle I_1 E I_2 = 90^\circ$. Таким образом, точки E и S лежат на окружности с диаметром $I_1 I_2$. Лемма доказана.

Вернемся к нашей задаче. Согласно лемме, точки I_1, I_2, E, S лежат на одной окружности. Аналогично, I_3, I_4, E, S лежат на одной окружности. Отсюда $PI_2 \cdot PI_1 = PE \cdot PS = PI_3 \cdot PI_4$, поэтому точки I_1, I_2, I_3, I_4 лежат на одной окружности ω . По свойству полярного соответствия (см., например, статью «Полюс и поляр относительно окружности» в «Кванте» № 7 за 1986 г.), точки $Q = I_2 I_3 \cap I_4 I_1$ и $E = I_1 I_3 \cap I_2 I_4$ лежат на поляре P (относительно ω), значит, прямая $QE = BD$ – это полярная точки P . Так как прямая $PT = I_a I_c \perp BD$, то прямая $I_a I_c$ содержит центр окружности ω . Аналогично, $I_b I_d$ содержит центр ω . Итак, $X = I_a I_c \cap I_b I_d$ – это центр окружности ω .

Замечание. Отметим, что данная задача – это усиление задачи М1524 И. Вайнштейна, в которой утверждается, что точки I_1, I_2, I_3, I_4 лежат на одной окружности.²

Н. Белухов

² В «Задачнике «Кванта» была опубликована еще одна задача И. Вайнштейна (М1495), в которой устанавливается соотношение $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$ для радиусов r_1, r_2, r_3, r_4 окружностей, вписанных в треугольники ABE, BCE, CDE, DAE . На самом деле это соотношение верно для любых окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ таких, что пары (ω_1, ω_2) и (ω_3, ω_4) имеют общий центр гомотетии с положительным коэффициентом и пары (ω_2, ω_3) и (ω_1, ω_4) имеют общий центр гомотетии с положительным коэффициентом. В рассматриваемой конструкции можно усмотреть много других интересных фактов. (Прим. ред.)

Ф2220. Во время ремонтных работ на МКС космонавт, находясь снаружи, пользовался молотком. После одного неудачного удара головная часть молотка отломилась и улетела со скоростью 20 м/с относительно станции (эта скорость перпендикулярна плоскости орбиты станции). Оказалось, что сразу после этого удара и МКС и «новый спутник» имели относительно Земли одинаковые по величине скорости порядка 8 км/с, которые были горизонтальными для наблюдателя на Земле, над головой которого произошло описываемое происшествие. На какое максимальное расстояние удалятся друг от друга МКС и «новый спутник» за первые полчаса его самостоятельного полета?

В системе отсчета с началом в центре Земли и с осями, направленными на далекие звезды, орбиты станции и «нового спутника» будут окружностями с одинаковыми радиусами, которые пересекаются в двух точках: в месте, где они разлетелись, и на противоположной стороне Земли на той же высоте. Периоды обращения низколетающих спутников, т.е. находящихся на высотах, существенно меньших радиуса Земли, в такой системе отсчета составляют примерно 1,5 часа. Это означает, что через $1/4$ периода, т.е. примерно через 22,5 минуты, расстояние между объектами будет самым большим. Плоскости орбиты составят между собой угол, приблизительно равный 20/8000 (радиан). Отсюда следует ответ:

$$s_{\max} \approx R_3 \frac{20}{8000} = 16 \text{ км.}$$

Л. Молотков

Ф2221. В далеком космосе оказался школьный динамометр, корпус которого имеет массу $M = 20 \text{ г}$, а пружина имеет массу $m = 10 \text{ г}$. За крючок, укрепленный на корпусе, тянут с силой $F_1 = 5 \text{ Н}$, направленной вдоль оси пружины, а за крючок, находящийся на свободном конце пружины, тянут с силой $F_2 = 2 \text{ Н}$, направленной в противоположную сторону. Что будет показывать динамометр, т.е. напротив какого деления на его шкале остановится индикаторная стрелка?

Если под действием двух одинаковых по величине и противоположно направленных сил, приложенных к концам пружины, она растягивается на Δx , то при наличии только одной силы, приложенной только к одному концу пружины, она растягивается на $\Delta x/2$. Таким образом, если жесткость пружины равна k и ее тянут в противоположные стороны с силами f_1 и f_2 , то длина пружины увеличивается на $(f_1 + f_2)/(2k)$. В данном случае корпус и пружина движутся с ускорением, поэтому на конец пружины, прикрепленный к корпусу динамометра, действует сила, равная

$$F_1 - \frac{(F_1 - F_2)M}{M + m} = 3\text{Н.}$$

В результате удлинение пружины определяется двумя растягивающими ее силами: 2 Н и 3 Н, т.е. динамо-

метр будет «показывать» силу

$$f = \frac{2 \text{ Н} + 3 \text{ Н}}{2} = 2,5 \text{ Н}.$$

В.Сергеев

Ф2222. На наклонной плоской поверхности, составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом, находится небольшая плоская шайба массой $m = 0,5 \text{ кг}$, прикрепленная легкой нитью длиной $L = 1 \text{ м}$ к точке на этой поверхности. Шайбу толкают вдоль поверхности так, что нить оказывается натянутой и скорость шайбы перпендикулярна нити. В некоторый момент шайба имеет горизонтальную скорость $v = 2 \text{ м/с}$. Каково по величине ускорение шайбы в этот момент? Каким может быть натяжение нити в этот момент? Коэффициент трения шайбы о поверхность $\mu = 0,6$. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Поскольку скорость шайбы в рассматриваемый момент времени горизонтальна, шайба находится либо в верхней, либо в нижней точке окружности, по которой движется. Поперечная, по отношению к скорости, составляющая ускорения равна

$$a_1 = \frac{v^2}{L} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Эта составляющая ускорения в верхней точке не может быть меньше $g \sin \alpha = 8,7 \text{ м/с}^2$, следовательно, шайба проходит нижнюю точку. Продольная составляющая ускорения шайбы обеспечивается силой трения и равна

$$a_2 = \mu g \cos \alpha = 3 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение имеет величину

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 5 \text{ м/с}^2.$$

Натяжение нити в этот момент равно

$$F = \frac{mv^2}{L} + mg \sin \alpha = 6,35 \text{ Н}.$$

С.Дмитриев

Ф2223. Парафиновые свечи имеют цилиндрическую форму с площадью поперечного сечения $S = 1 \text{ см}^2$ и длиной $L = 20 \text{ см}$. Если свеча горит в подсвечнике, то время ее горения равно $T = 3 \text{ ч}$. На одном конце такой свечи поджигают фитиль, а к другому концу прикрепляют стальной шарик диаметром $D = 7 \text{ мм}$. Свечу опускают в воду при температуре 4°C , и она некоторое время плавает, не касаясь дна сосуда. Сколько времени она будет гореть в этом случае? Плотность парафина $\rho_{\text{п}} = 0,9 \text{ г/см}^3$, плотность стали $\rho_{\text{с}} = 7,8 \text{ г/см}^3$, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1,0 \text{ г/см}^3$.

Если считать, что скорость горения плавающей свечи и скорость горения свечи в подсвечнике совпадают, то в момент окончания горения ее средняя по объему плотность должна сравняться с плотностью воды:

$$(L-x)S\rho_{\text{п}} + \frac{\pi D^3}{6}\rho_{\text{с}} = \rho_{\text{в}}\left((L-x)S + \frac{\pi D^3}{6}\right).$$

Отсюда находим длину сгоревшей части свечи x :

$$x = L - \frac{\pi D^3(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})}{6S(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{п}})} = 7,8 \text{ см}.$$

Искомое время горения t находим, исходя из одинаковости скорости горения:

$$\frac{L}{T} = \frac{x}{t}, \text{ откуда } t = \frac{Tx}{L} = 1 \text{ ч } 10 \text{ мин}.$$

Замечание. На самом деле парафин, контактирующий с холодной водой, не плавится, поэтому образуются тонкие парафиновые стенки и свеча продолжает гореть и по прошествии 1 часа 10 минут, напоминая по форме маленькую пустую пробирку с огоньком внутри.

В.Свечкин

Ф2224. Экспериментатор Вася приобрел очень качественный термос (сосуд, который исключает теплообмен содержимого с окружающей средой) емкостью 1 л, теплоемкость стенок которого 100 Дж/К. Начальная температура стенок пустого термоса 20°C (как в комнате). Вася последовательно наливает в термос 1 г воды при температуре 1°C , затем 2 г воды при температуре 2°C , потом 3 г воды при температуре 3°C ... и так далее вплоть до заполнения термоса. Какой будет установившаяся температура содержимого термоса?

Когда Вася налил в термос 44-ю порцию, в термосе оказалось 990 мл воды. Последняя порция имеет температуру 45°C , но в термос попадает только 10 мл воды. Из уравнения теплового баланса находим установившуюся температуру содержимого термоса t :

$$t = \frac{100 \cdot 20 + 4,2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 44^2 + 10 \cdot 45)}{100 + 4,2(1 + 2 + 3 + \dots + 44 + 10)}^\circ\text{C} = 29,6^\circ\text{C}.$$

Э.Васин

Ф2225. Легкое кольцо из тонкой проволоки висит на мыльной пленке, которая удерживается рамкой в форме окружности. Масса кольца m , его радиус R , коэффициент поверхностного натяжения пленки σ , диаметр рамки $D > 2R$. Рамка и кольцо горизонтальны, их центры находятся на одной вертикали. Каково расстояние от плоскости кольца до плоскости рамки? Массой пленки можно пренебречь в сравнении с массой кольца. Выполняется условие «легкости» кольца: $mg \ll \sigma R$.

Касательная плоскость к любому участку мыльной пленки, находящемуся на расстоянии x от вертикальной линии, проходящей через центры кольца и рамки, наклонена к горизонту на угол α , для которого выполняется соотношение

$$4\pi\sigma x \sin \alpha = mg.$$

Неравенство, указанное в условии задачи, подсказывает, что этот угол всюду мал в сравнении с 1, т.е. можно считать, что $\alpha = \sin \alpha = \text{tg } \alpha$. При увеличении расстояния от указанной оси на dx край пленки приподнимается на

$$dh = dx \text{tg } \alpha = \frac{mg}{4\pi\sigma} \frac{dx}{x}.$$

Суммирование (или интегрирование) дает ответ:

$$h = \frac{mg}{4\pi\epsilon} \ln \frac{D}{2R}. \quad \text{С.Кольцов}$$

Ф2226. Маленький шарик и тонкий непроводящий стержень большой длины L , массы которых M одинаковы, подвешены к потолку на нитях одной и той же и очень большой длины R ($R \gg L$). Нити позволяют шарiku и стержню двигаться только в одной вертикальной плоскости. Сначала шарик и стержень не были заряжены и висели так, что почти соприкасались друг с другом, причем шарик находился возле одного из концов стержня (см. рисунок). Шарiku и стержню сообщили одинаковые электрические заряды Q , причем заряд на стержне распределили равномерно по его длине. На каком расстоянии x окажутся в положении равновесия шарик и тот конец стержня, возле которого шарик находился вначале? Считайте, что диаметр шарика много меньше x , а x много меньше длины стержня L .



Если шарик и стержень имеют одинаковые массы, то в положении равновесия они будут находиться на одном горизонтальном уровне, т.е. углы наклона нитей, на которых висят предметы, будут по величине одинаковыми. Силы электростатического отталкивания шарика и стержня в положении равновесия уравновешиваются горизонтальными составляющими сил натяжения нитей. Пусть расстояние x между шариком и ближайшим к нему концом стержня изменилось на малую величину Δx , тогда потенциальная энергия электрического взаимодействия шарика и стержня тоже изменится. Из закона сохранения энергии

$$F(x)\Delta x = \frac{Q\Delta x}{L} k \left(\frac{Q}{x} - \frac{Q}{L+x} \right)$$

находим силу электростатического отталкивания:

$$F(x) = \frac{kQ^2}{x(L+x)} = \frac{kQ^2}{xL}.$$

Здесь учтено, что $x \ll L$, а k – это электрическая постоянная. Пренебрегая размерами шарика в сравнении с величиной расстояния x между шариком и стержнем в положении равновесия, получаем условие равновесия шарика:

$$\frac{xMg}{2R} = \frac{kQ^2}{xL}.$$

Отсюда находим

$$x = Q \sqrt{\frac{2Rk}{MgL}}.$$

Д.Шариков

Ф2227. Связь между эффективным напряжением U на лампе накаливания и током I , текущим через нее, дается формулой $I \sim U^{3/5}$. Две лампы с номинальными напряжениями 220 В и номинальными мощностями 40 Вт и 100 Вт включили последовательно в сеть напряжением 220 В. Каково падение напряжения на лампе меньшей номинальной мощности? (Разрешается пользоваться калькулятором.)

Обозначим коэффициенты пропорциональности между I и $U^{3/5}$ для первой и второй лампочек символами k_1 и k_2 соответственно. Их отношение равно $k_1 : k_2 = 40 \text{ Вт} : 100 \text{ Вт} = 0,4$. Суммарное падение напряжения на лампочках равно 220 В. Отсюда получаем

$$I^{5/3} \left(\frac{1}{k_1^{5/3}} + \frac{1}{k_2^{5/3}} \right) = 220 \text{ В},$$

и

$$U_1 = \frac{I^{5/3}}{k_1^{5/3}} = \frac{220 \text{ В}}{\left(\frac{1}{k_1^{5/3}} + \frac{1}{k_2^{5/3}} \right) k_1^{5/3}} = \frac{220 \text{ В}}{1 + 0,4^{5/3}} \approx 181 \text{ В}.$$

С.Варламов

Задачи

1. На таблице Пифагора, как на шахматной доске, расставлены девять не угрожающих друг другу ладей. Нетрудно установить девять чисел, замаскированных

1	2	3	4	5	♖	7	8	9
2	♗	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	♘
4	8	12	16	20	24	♙	32	36
5	10	15	♚	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	♛	54
♜	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	♞	48	56	64	72
9	18	♟	36	45	54	63	72	81

этим ладьями, и найти их произведение. Докажите, что при любой другой расстановке девяти не угрожающих друг другу ладей произведение чисел не изменится.

Н. Авилов

2. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

- ничей не будет;
 - в ворота «Юга» забьют;
 - «Север» выиграет;
 - «Север» не проиграет;
 - в матче будет забито ровно 3 гола.
- После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счетом закончился матч?

Л. Федулкин, Е. Федулкина

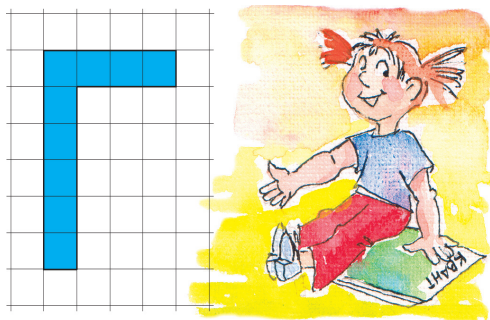


Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 2 и 4 предлагались на XXII Математическом празднике.

3. Можно ли на листочке бумаги в клетку нарисовать четыре неперекрывающиеся одинаковые по форме буквы «Г» высотой 6 клеток и шириной 4 клетки так, чтобы у любых двух букв был общий участок границы?

С. Маркелов



4. Найдите все решения ребуса



(Одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, разными – разные.)

Д. Шноль

5. Куб $10 \times 10 \times 10$ составлен из белых кубиков $1 \times 1 \times 1$. Сережа красит всю поверхность куба в красный цвет. Затем Ваня забирает себе сколько хочет кубиков, у каждого из которых ровно три грани оказались красными. После этого Сережа снова красит всю поверхность в красный цвет, а Ваня затем забирает такие же кубики по тому же правилу и т.д. Может ли Ваня в итоге забрать себе все кубики?

Д. Калинин, Э. Акопян



Иллюстрации: Д. Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvantjournal.ru (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

1. Можно ли домножить число 101001000100001 на другое целое число так, чтобы среди цифр произведения не было нуля?

Фольклор

2. Прямоугольник $ABCD$ разбит двумя прямыми, пересекающимися в точке X , на четыре прямоугольника (рис. 1).

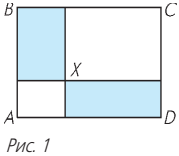


Рис. 1

а) Докажите, что если точка X лежит на диагонали AC , то площади левого верхнего и правого нижнего прямоугольников равны (на рисунке они закрашены).

б) Пусть известно, что площади левого верхнего и правого нижнего прямоугольников равны. Обязательно ли тогда точка X лежит на диагонали AC ?

Фольклор

	8			
			7	
	9			

Рис. 2

3. Вначале во всех клетках таблицы 3×5 стоят нули. Выполняя такую операцию: выбирают какой-нибудь квадрат 2×2 и увеличивают на 1 каждое из четырех его чисел. Так сделали несколько раз

и получили таблицу, некоторые числа в которой известны (рис. 2). По этим данным выясните, сколько операций могло быть произведено.

Е.Бакаев

4. На плоскости даны 10 точек, некоторые из них соединены отрезками. Докажите, что можно рядом с каждой точкой написать натуральное число так, что соединенными отрезком окажутся те и только те пары точек, числа у которых будут иметь общий множитель, больший 1.

Фольклор

5. Имеется 25 лошадей, из которых надо определить трех самых быстрых (все лошади бегут со своими постоянными скоростями). Для этого устраивается несколько забегов по 5 лошадей в каждом, и в конце каждого забега определяется, в каком порядке финишировали лошади.

а) Можно ли гарантированно найти трех самых быстрых лошадей, устроив всего 7 таких забегов?

б) А шести забегов хватит?

Г.Гальперин

Приятного аппетита!

И. АКУЛИЧ

– Отправитесь-ка все, так как есть, к полицеймейстеру; он у нас чудотворец: ему стоит только мигнуть, проходя мимо рыбного ряда или погребца, так мы, знаете ли, так закусим!

Н.В.Гоголь. Мертвые души. Глава 7

СРЕДИ МНОЖЕСТВА НАРОДНЫХ СКАЗОК НЕКОТОРЫЕ вызывают особый интерес своим несомненным математическим содержанием. К таковым можно отнести русскую сказку «Как мужик курицу делил»¹.

¹ Это собирательное название сказки; в различных сборниках она озаглавлена по-разному.

Сюжет ее таков. Бедный мужик решил поздравить помещика с праздником. Он зажарил единственную имевшуюся у него курицу и доставил как раз к обеду. А у помещика, надо сказать, семья была не маленькая: он сам, да жена, да два сына, да две дочери.

– Спасибо за угощение! – сказал помещик. – Садись с нами за стол. И подели-ка свое угощение между всеми, а то, кажется, маловато выходит.

– С удовольствием! – ответил мужик. – Ты, барин, в доме голова – так вот тебе голову. С другой стороны, жена твоя – это шея: куда повернется, туда голова и

смотрит. Поэтому ей мы отдаем шею.² Сыновьям твоим, как вырастут, предстоит много дорог пройти, изрядно ноги истоптать, поэтому им даем по ноге. Дочери твои скоро замуж выйдут и улетят из родного дома, так что им – по крылышку. Ну, а мне, мужику, то, что осталось – туловище.

Такая математика помещику весьма понравилась, и он щедро заплатил мужику.

Однако на том история не закончилась. Узнал обо всем этом другой мужик – богатый – и принес помещику аж пять жареных кур, рассчитывая получить пропорционально большее вознаграждение. Но тот его огорошил, потребовав:

– Раздели-ка ты этих кур между нами, чтобы всем досталось *поровну*.

Богатый мужик оторопел: как поделить 5 кур на 6 человек (или даже на 7, если учесть его самого)? Пришлось вновь обращаться к бедному мужику, который за словом в карман не полез:

– Тебе, барин, с женой даем на двоих одну курицу – и вас стало трое. Твоим сыновьям тоже одну курицу – вот и их трое. И дочерям одну курицу – опять получается трое. Ну а мне, мужику, две курицы – и нас трое! Всем поровну!

В результате он славно подзакусил (и получил в придачу от помещика еще одну денежную премию за остроумие и сообразительность).

Вот такая математическая сказка. Что, скажете, не вполне математическая? Пожалуй. Тогда давайте перенесемся несколько южнее и западней, взяв в руки сборник сказок классика молдавской и румынской литературы Иона Крянга (1837–1889). До чего ж они хороши! А персонажи-то каковы: отважный Фэт Фрумос, неунывающий Иван Турбинка, злобный песиголовец³ и другие, не менее колоритные, не дают читателю заскучать ни на минуту.

Но не только волшебными приключениями интересны сочинения замечательного писателя. Не чурался он и бытовых сказок, среди которых мы и встречаем одну очень даже математическую.

Итак, шли куда-то два путника. У одного в котомке было два хлеба, у другого – три. Когда они собрались пообедать, к ним присоединился третий, не имевший ничего. Когда они втроем съели весь хлеб, поделив его поровну, третий дал первым двоим пять монет в уплату за угощение. Те заспорили, как поделить деньги по справедливости. Первый требовал делить пополам – по две с половиной, а второй – соответственно имевшемуся изначально количеству хлеба, т.е. 2 и 3. Кто прав?⁴

Давно известно, что при дележе денег правых не бывает. Точнее, каждый считает, что прав только он сам, ибо понятие о справедливости у каждого свое. На первый взгляд, конечно, представляется, что дележ

первого (поровну) абсурден. Хотя он мог вполне разумно обосновать свое мнение. Например, так: «Представь себе, что наш гость *вообще ничего* нам не заплатил. Тогда бы мы получили по круглому нулю, т.е., несомненно, поровну. Почему же сейчас мы должны делить не поровну?»

Звучит убедительно. Но на языке шулеров такое рассуждение – типичное *передергивание*, а на математическом языке – явная подмена прямой теоремы обратной. Посмотрите, что получается. Пусть x – общее число полученных монет, а $f(x)$ и $g(x)$ – число монет, полученное первым и вторым путником соответственно (они записаны в виде функций, поскольку, безусловно, зависят от x). Тогда аргументы первого можно изложить так: если $f(0) = g(0)$, то $f(x) = g(x)$ для *любого* x . Но это неверно, хотя обратная теорема, несомненно, верна. Вот и все. Ну, а дележ второго выглядит безупречно, и большинство людей считают его абсолютно правильным.

Но *и это не так*, в чем мы убеждаемся, читая сказку дальше. Повздорив, путники пришли в город, где обратились к судье, и тот, рассмотрев ситуацию, объявил, что первому причитается лишь одна монета, зато второму – остальные четыре! Он рассуждал так. Всего

было 5 хлебов, поэтому каждый съел $\frac{5}{3}$ хлеба. Значит, первый из двух своих хлебов $\frac{5}{3}$ съел сам, а третьему

оставил только $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$ хлеба. Второй же выделил

ему $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$ хлеба, т.е. вчетверо больше первого, потому-то ему и причитаются 4 монеты против одной, полагающейся первому.

Вот как первого погубила жадность. Хотел урвать полмонеты – и потерял целую! Похоже, после этого он наверняка до конца дней возненавидел судебные власти. И, конечно, весьма удивительно, что вполне разумный дележ второго тоже оказался ошибочным. Но не надо совсем списывать его со счетов – он был бы пригоден при несколько ином повороте сюжета: если третий путник окажется настолько голоден и проворен, что проглотит все пять хлебов еще до того, как первые двое успеют открыть рот! Тогда, по сути, речь пойдет просто о продаже ему всех запасов хлеба.

Тут и сказке конец. Однако не исключено, что читатели встречали подобный сюжет где-нибудь еще. Например, в «Живой математике», принадлежащей перу известного популяризатора естественных наук Якова Исидоровича Перельмана (1882–1942), описывается случай с жильцами коммунальной квартиры Тройкиной, бросившей в общую печь 3 полена, Пятеркиной, бросившей 5 поленьев, и их соседом Бестопливным, пользовавшимся их огнем и заплатившим за это 8 рублей. Оказывается, и здесь хозяйка трех поленьев получает лишь один рубль!

² В некоторых вариантах сказки мужик говорил чуть по-иному: «Жена твоя хозяйка-хлопотунья, должна все время по дому вертеться, так что ей – гузку!» С питательной точки зрения мало чем от шеи отличается.

³ Жуткое существо, похоже на человека с собачьей головой. Упаси Бог такое встретит!

⁴ Вечный вопрос! Правда, чаще он формулируется в альтернативном виде: «Кто виноват?»

Обратим внимание: как-то очень удачно у них все делится – все время нацело! А будь у этих путников (жильцов) другое количество хлебов (поленьев) – не придется ли им рубить монеты на части?

Давайте выясним. Пусть у первого и второго путников было m и n хлебов соответственно. Тогда каждый из троих съел $\frac{m+n}{3}$ хлебов, поэтому первый дал третьему $m - \frac{m+n}{3} = \frac{2m-n}{3}$ хлебов, а второй дал $n - \frac{m+n}{3} = \frac{2n-m}{3}$ хлебов. Поэтому общую сумму $(m+n)$ монет они должны разделить в пропорции $\frac{2m-n}{3} : \frac{2n-m}{3}$, или, отбросив тройки в знаменателях, в пропорции $(2m-n) : (2n-m)$. Сколько же достанется каждому? Это даже считать не надо! Так как $(2m-n) + (2n-m) = m+n$, т.е. как раз соответствует общему числу монет, то первый и второй именно столько и получают: $(2m-n)$ и $(2n-m)$ монет соответственно. Видите – заведомо целые числа! Значит, имеем удивительный результат: сколько бы хлебов у путников ни было, они всегда получают по *целому* числу монет. И кстати, непременно должны выполняться неравенства $n \leq 2m$ и $m \leq 2n$, иначе кому-то из путников достанется *отрицательная* сумма денег.

Первый вопрос читателю: как объяснить эту отрицательную сумму с «практической» точки зрения?

Как видно, для большинства m и n справедливый дележ отличается от «естественной» пропорции $m : n$ (и совпадает с ним в единственном случае: когда $m = n$). При этом наиболее эффектно он выглядит, если тому, кто имел меньше хлебов, достанется одна-единственная монета. Интересно, каковы должны быть для этого m и n ?

Разберемся. Пусть для определенности $m \leq n$, тогда должно выполняться равенство $2m - n = 1$, т.е. m – любое натуральное, а $n = 2m - 1$. Например, если $m = 1$, то $n = 1$, а если взять уже известные нам $m = 2$ и $m = 3$, то получим, соответственно, $n = 3$ и $n = 5$. Вот уже есть три подходящих пары (m, n) : $(1, 1)$, $(2, 3)$ и $(3, 5)$.

Но ведь это... соседние числа Фибоначчи⁵! Вот уж сюрприз так сюрприз. Как же так, при чем здесь Фибоначчи? Ведь последовательность Фибоначчи, как известно, такова: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 и так далее, где каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих: $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$. Неужели и для других соседних чисел Фибоначчи будет то же самое? Попробуем-ка другую пару чисел: $m = 5$, $n = 8$. Получается $2m - n = 2 \neq 1$. Аж легче на душе стало – все-таки, похоже, имели место случайные совпадения.

Но и в таком случае возникает задача о том, какие *соседние* числа Фибоначчи способны наградить первого путника ровно одной монетой – только ли те три

пары, что мы нашли, или какие-то еще? Для ответа на этот вопрос используем упомянутое нами главное свойство чисел Фибоначчи: $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$. Пусть пара чисел (u_k, u_{k+1}) удовлетворяет нашему условию, т.е. $2u_k - u_{k+1} = 1$. Но

$$2u_k - u_{k+1} = 2u_k - (u_k + u_{k-1}) = u_k - u_{k-1} = u_{k-2}.$$

Итак, должно быть $u_{k-2} = 1$, что верно лишь для $k = 3$ и $k = 4$. Это дает два уже известных решения: $(2, 3)$ и $(3, 5)$. А третье решение – $(1, 1)$? Куда оно-то делось?

Второй вопрос читателю: действительно, куда оно делось? Почему мы его не обнаружили вместе с первыми двумя?

Но тема Фибоначчи еще не до конца исчерпана. Почему мы рассматривали только соседние числа Фибоначчи? А если взять *не обязательно* соседние? Что тогда?

Давайте эту ношу переложим на другие плечи. Например, читательские.

Третий вопрос читателю: существуют ли *не соседние* числа Фибоначчи, дающие владельцу меньшего числа хлебов вознаграждение в размере ровно одной монеты?

И еще один штрих. Когда автор этой статьи опрашивал своих приятелей насчет справедливого дележа в исходной задаче-сказке И.Крюнгэ, то практически никто не дал правильного ответа, и лишь один человек ответил верно. А помогло ему то, что он является заядлым игроком в... карты, а точнее – в игру под названием «преферанс». Дело в том, что в преферансе каждому игроку отводится специальное поле для записи штрафных очков, именуемое «горой». После игры горы всех игроков суммируются, затем определяется среднее арифметическое их значение, и далее каждый получает прибыль или, наоборот, терпит убыток в зависимости от того, на сколько и в какую сторону отличается его гора от среднего значения. Знакомый картежник сразу уловил, что расчет справедливого дележа денег аналогичен расчету горы, в которой первый игрок имеет 3 очка-хлеба, второй – 2 очка, а третий – 0 очков (только очки не штрафные, а наоборот). Так что пристрастие к азартным играм может иногда оказаться и полезным!

Но хватит о картах – это непедагогично. Лучше посоветовать читателю на досуге проанализировать с математической точки зрения какие-нибудь другие «съедобные» сказки. Например, «Колобок» или «Репка».

И.Акулич

⁵ Леонардо Фибоначчи (ок.1175–1250) – итальянский математик. Свои удивительные числа он представил в «Книге абака», вышедшей в свет в 1202 году.

Где ошибка?

В этом калейдоскопе мы собрали несколько задач с неверными решениями. Найдите ошибки?

1. Бывают ли квадратные уравнения, у которых есть три корня? Пожалуйста! Возьмите любые три разных числа a , b , c и составьте уравнение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1.$$

Оно, очевидно, квадратное относительно x (не верите – раскройте скобки и приведите подобные). Но каждое из чисел a , b , c будет его корнем (подставьте вместо x и убедитесь). В чем дело?

2. Решим такую задачу:

Найдите все такие пары (p, q) , что каждое из чисел p и q будет корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Проще всего воспользоваться теоремой Виета: если p и q – корни, то $p + q = -p$ и $pq = q$. Из последнего равенства либо $q = 0$ и тогда $p = 0$, либо $p = 1$ и тогда

$q = -2$. Задача решена? Но возьмем пару $p = -\frac{1}{2}$ и $q = -\frac{1}{2}$. Подстановкой легко убедиться, что

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$. Как же мы эту пару потеряли?

3. Попробуем доказать методом математической индукции такое утверждение:

Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный.

База индукции. Если треугольник разбит отрезком на два треугольника, то один из них не остроугольный (ясно).

Шаг индукции. Пусть имеется треугольник, как-то разбитый на n треугольников. Проведем еще один отрезок, разбив один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на $n + 1$ треугольник, причем один из двух новых треугольников будет не остроугольный.

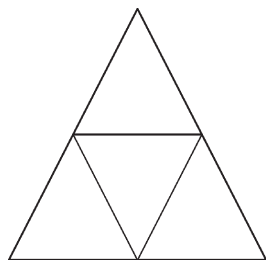


Рис. 1

Кажется, что по индукции теорема доказана. Но как тогда быть с разбиением, изображенным на рисунке 1?

4. У короля была бесконечная башня из прямоугольных параллелепипедов-комнат, поставленных одна на другую. Первая комната имела

размеры $1 \times 1 \times \frac{1}{2}$, вторая – $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, третья – $1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ и так далее. Однажды король приказал слуге выкрасить все комнаты изнутри красной краской.

– Но, повелитель, – ответил слуга. – Даже если в комнате с номером n взять только стену $1 \times \frac{1}{n}$ площади $\frac{1}{n}$, сумма площадей всех этих стен уже будет бесконечной, а столько краски...

– Почему бесконечной? – перебил король.

– Получается сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$, а это же гармонический ряд! Я прочитал в «Кванте» №1 за 2011 год на странице 59, что...

– Меня это не интересует, – остановил слугу король. – Комнаты должны быть выкрашены.

Слуга совсем уж было пригорюнился, как вдруг его осенила гениальная идея. Ведь суммарный объем всех комнат конечен – он равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \\ = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots = 1. \end{aligned}$$

А значит, можно просто залить всю башню краской! Потом вылить лишнее, и все стены окажутся покрашенными.

Не кажется ли вам, что в этой истории что-то не так?

5. Докажем, что любой тупой угол равен прямому. Из концов отрезка AB проведем два равных между собой отрезка AC и BD , лежащих по одну сторону от прямой AB и образующих с ней прямой угол DBA и тупой CAB ; равенство этих углов и будем доказывать. Соединив C с D , получим четырехугольник $ABDC$, у которого стороны AC и BD , очевидно, не параллельны, как и стороны AB и CD (иначе $ABDC$ был бы равнобедренной трапецией с неравными углами при основании AB). К каждому из отрезков AB , CD проведем его срединный перпендикуляр. Так как отрезки не параллельны, то и перпендикуляры к ним тоже не параллельны и не сливаются, а пересекаются, пусть в точке N . Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: точка N лежит «выше» прямой AB , точнее – по ту же сторону от прямой AB , что и четырехугольник $ABDC$ (рис. 2). Соединим эту точку со всеми вершинами четырехугольника; так как она одинаково удалена от концов отрезка AB и одинаково – от концов отрезка CD , треугольники NAC и NBD равны по трем сторонам. Отсюда

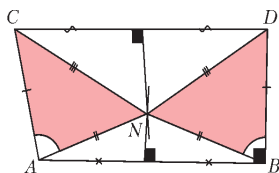


Рис. 2

следует, что $\angle NAC = \angle NBD$. Прибавляя к первому углу угол NAB , ко второму – угол NBA и учитывая, что $\angle NAB = \angle NBA$ по свойству равнобедренного треугольника, приходим к равенству $\angle CAB = \angle DBA$.

Случай 2: точка N лежит на AB , т.е. служит серединой отрезка AB . Предыдущее доказательство упрощается – равенство $\angle CAB = \angle DBA$ получается сразу из равенства треугольников NAC и NBD .

Случай 3: точка N лежит «ниже» AB , т.е. не по ту сторону от прямой AB , по какую лежит четырехугольник $ABDC$ (рис. 3). Снова из равенства тре-

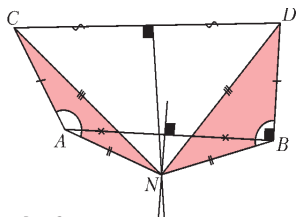


Рис. 3

угольников получается $\angle NAC = \angle NBD$, но теперь от этих углов надо отнять равные углы NAB и NBA , и снова получится $\angle CAB = \angle DBA$.

Ну надо же! А вы заметили подвох?

6. Найдите ошибку в следующем доказательстве.

С одной стороны, по формуле Ньютона–Лейбница,

$$\int_1^2 (\ln 2x)' dx = \int_1^2 (\ln x)' dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

С другой стороны, по формуле замены переменной ($2x \leftrightarrow u$),

$$\int_1^2 (\ln 2x)' dx = \frac{1}{2} \int_2^4 (\ln u)' du = \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

В итоге получаем, что $\ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$.

7. Найдём площадь круга $x^2 + y^2 = r^2$. Разобьём его на криволинейные треугольники лучами, выходящими из начала координат O . Площадь одного такого треугольника с достаточно малым углом $\Delta\varphi$ при вершине O (рис. 4) с большой точностью равна $\frac{1}{2} r^2 \sin \Delta\varphi$, что, в свою очередь, примерно равно $\frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$ (так как $\sin \varphi \approx \varphi$ при малых φ). Тогда

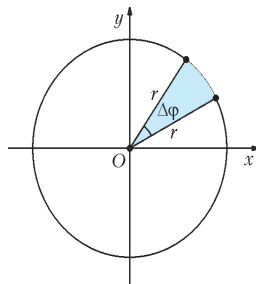


Рис. 4

площадь круга равна $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi = \pi r^2$ – хорошо знакомая нам формула.

Применим этот метод для вычисления площади эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 5). Зададим его параметрически: точка $R(\varphi) = (a \cos \varphi; b \sin \varphi)$, очевидно,

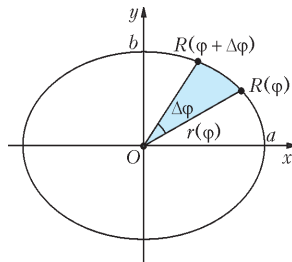


Рис. 5

пробегает весь эллипс, когда угол φ изменяется от 0 до 2π . Длину радиуса-вектора $OR(\varphi)$ будем обозначать $r(\varphi)$.

Разобьём эллипс на криволинейные треугольники лучами, выходящими из начала координат O . Площадь одного такого треугольника со сторонами $OR(\varphi)$ и $OR(\varphi + \Delta\varphi)$ при достаточно малом угле $\Delta\varphi$ с большой точностью равна $\frac{1}{2} r^2(\varphi) \Delta\varphi$. Тогда площадь всего эллипса равна

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2(\varphi) d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{b^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{a^2 + b^2}{2} \pi. \end{aligned}$$

Но во всех справочниках написано, что площадь такого эллипса равна $ab\pi$.

Неужели справочники врут?

Материал подготовил С.Дориченко

«Исправленный» закон Кулона

С.ВАРЛАМОВ

КАК ИЗВЕСТНО, В ФОРМУЛИРОВКЕ ЗАКОНА КУЛОНА присутствует оговорка: размеры заряженных тел должны быть значительно меньше расстояния между телами, чтобы тела можно было считать точечными. А как изменится вид зависимости силы взаимодействия двух заряженных тел, если учесть их неточность, т.е. принять во внимание их объемность?

Рассмотрим взаимодействие двух проводящих тел с объемами V_1 и V_2 , на которых имеются электрические заряды Q и q соответственно и расстояние r между которыми гораздо больше чем $V_1^{1/3}$ и $V_2^{1/3}$. Так как расстояние r большое, можно считать, что каждое из тел с отличным от нуля объемом находится в поле, созданном другим заряженным телом, расположенным достаточно далеко. Иными словами, в первом приближении внешнее поле для каждого объемного тела можно рассматривать как поле, созданное находящимся далеко точечным зарядом.

В соответствии с принципом суперпозиции, сначала можно найти силы взаимодействия в случаях, когда одно тело заряжено, а другое нет, а затем добавить силу кулоновского взаимодействия заряженных точек в случае, когда заряды этих тел не равны нулю. В результате получится хорошее приближение к истине. Ожидаемая зависимость должна представляться в виде суммы (суперпозиции) нескольких слагаемых:

$$F(r, Q, q, V_1, V_2) = \frac{kqQ}{r^2} + F_1(r, Q, V_2) + F_2(r, q, V_1) + \dots$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, величины которых значительно меньше, чем величины тех слагаемых, которые выписаны символами. Первое слагаемое – это закон Кулона для двух точечных зарядов, остальные слагаемые – «поправки» к этому закону; k – коэффициент, учитывающий выбранную систему единиц.

Поскольку тела проводящие, заряды на их поверхностях будут располагаться так, что напряженность электрического поля внутри этих тел будет равна нулю. При этом распределения зарядов на поверхностях тоже подчиняются принципу суперпозиции. Чтобы найти выражение для $F_1(r, Q, V_2)$, второе незаряженное тело мысленно разрежем на множество пластинок, плоскости которых перпендикулярны линии, соединяющей центры двух тел, вычислим силу, действующую только на одну уединенную пластинку, а затем снова мысленно соберем все пластинки вместе и сложим результаты действия точечного заряда Q на все множество пластинок.

Одна незаряженная пластинка толщиной d и площадью S (см. рисунок) приобрела дипольный момент $P = \Delta q d$, направленный вдоль линии, соединяющей точечный заряд (первое тело) со вторым телом, и равный по величине

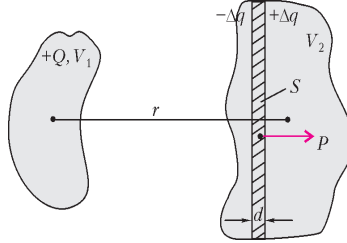
$$P = \frac{QS}{4\pi r^2} d = \frac{E_1 S d}{4\pi k}$$

Видно, что этот дипольный момент пропорционален объему пластинки Sd . Суммарный дипольный момент всех пласти-

нок, на которые мы мысленно разрезали второе тело, равен

$$P_2 = \frac{QV_2}{4\pi r^2} = \frac{E_1 V_2}{4\pi k}$$

В поле первого точечного заряда с напряженностью $E_1 = \frac{kQ}{r^2}$



этот дипольный момент имеет потенциальную энергию

$$W_1 = -P_2 E_1 = -\frac{V_2}{4\pi k} \left(\frac{kQ}{r^2} \right)^2$$

Соответствующая сила притяжения равна

$$F_1 = -\frac{\Delta W_1}{\Delta r} = \frac{V_2 k Q^2}{\pi r^5}$$

Аналогичное выражение получим для силы, которую испытывает первое тело из-за того, что на нем перераспределяются заряды и это связано с наличием внешнего поля, созданного вторым телом:

$$F_2 = \frac{V_1 k q^2}{\pi r^5}$$

Если считать, что дипольный момент на одном теле создает в месте расположения другого тела электрическое поле, в котором находится дипольный момент другого тела, то возникает дополнительная энергия взаимодействия:

$$W_{21} = \frac{2kP_1 P_2}{r^3} = \frac{2kQqV_1 V_2}{(4\pi)^2 r^7}$$

и соответствующая этой дополнительной энергии сила отталкивания:

$$F_{21} = -\frac{\Delta W_{21}}{\Delta r} = \frac{14kQqV_1 V_2}{(4\pi)^2 r^8}$$

Понятно, что эта дополнительная сила уже пренебрежимо мала, так как зависит от расстояния как $1/r^8$.

Итак, получаем

$$F(r, Q, q, V_1, V_2) = \frac{kQq}{r^2} - \frac{kQ^2 V_2}{\pi r^5} - \frac{kq^2 V_1}{\pi r^5} + \frac{7kQqV_1 V_2}{8\pi^2 r^8} + \dots$$

Какого порядка малости слагаемые мы обозначили здесь многоточием? Учтем, что каждое тело находится в поле, которое создано неточечным зарядом, и что заряды на телах перераспределяются. Созданный на втором теле дипольный момент P_2 создает в месте расположения первого тела электрическое поле напряженностью

$$E_{21} = \frac{2kP_2}{r^3} = \frac{2kQV_2}{4\pi r^5}$$

Это поле, с учетом объемности первого тела, создаст в этом первом теле дипольный момент, который по величине пропорционален полю:

$$P_{21} = \frac{V_1}{4\pi k} \frac{2kQV_2}{4\pi r^5}$$

Возникнет дополнительная потенциальная энергия:

$$W_{21,доп} = -P_{21} E_{21} = -\frac{V_1}{4\pi k} E_{21}^2 = -\frac{kQ^2 V_1 V_2^2}{16\pi^3 r^{10}}$$

и дополнительная сила взаимодействия (притяжения):

$$F_{21,\text{доп}} = -\frac{\Delta W_{21,\text{доп}}}{\Delta r} = \frac{5kQ^2V_1V_2^2}{8\pi^3r^{11}}.$$

И, аналогично, для обратного влияния:

$$F_{12,\text{доп}} = \frac{5kq^2V_2V_1^2}{8\pi^3r^{11}}.$$

Таким образом, слагаемые обозначенные многоточием, зависят от расстояния как $1/r^{11}$. Ими, естественно, можно пренебречь.

Если в формуле для силы взаимодействия двух неточечных проводящих заряженных тел последнее слагаемое, пропорциональное $1/r^8$, ввиду его малости не учитывать, то получается «уточненный» закон Кулона при условии, что расстояние r между телами гораздо больше чем $V_1^{1/3}$ и $V_2^{1/3}$:

$$F(r, Q, q, V_1, V_2) = \frac{kQq}{r^2} - \frac{kQ^2V_2}{\pi r^3} - \frac{kq^2V_1}{\pi r^3}.$$

Пусть заряды тел имеют одинаковые знаки. Зафиксируем все параметры за исключением только одного – заряда Q . Тогда получается, что зависимость силы взаимодействия от величины этого заряда выглядит весьма необычно: при малых величинах заряда Q сила взаимодействия соответствует притяжению тел, при больших Q тела тоже притягиваются, и только в некотором диапазоне значений Q тела отталкиваются. В частности, если на телах заряды одинаковые, т.е. $Q = q$, то тела обязательно отталкиваются.

В заключение – задача для самостоятельного решения.

Задача. Два одинаковых проводящих шара находятся в вакууме на некотором расстоянии друг от друга. На них имеются электрические заряды Q и q ($Q > q$), и сила электростатического взаимодействия шаров равна нулю. Какой дополнительный заряд Δq можно поместить на шар с меньшим начальным зарядом, чтобы и в этом случае сила взаимодействия шаров была равна нулю?

(Ответ: $\Delta q = \frac{Q^2}{q} - q$.)

Три года назад (в «Кванте» №1 за 2008 г.) в нашем журнале была опубликована статья И. Акулича (Минск, Белоруссия) «Призрак Леонардо». Рассмотренные в ней задачи и поставленные автором вопросы вызвали заметный отклик. В этом номере мы публикуем две статьи: «Охота на призрак Леонардо» (ее авторы – П. Самовол из города Беер-Шева в Израиле и В.Журавлев из Москвы) и «Раскраски графов и линейные уравнения» (ее авторы – В. Дорофеев из Мытищ и А. Спивак из Москвы), которые отвечают на некоторые вопросы, поставленные И.Акуличем. Прочитав эти статьи, вы познакомитесь с двумя разными подходами к одной и той же теме.

ОХОТА НА ПРИЗРАК ЛЕОНАРДО

П.САМОВОЛ, В.ЖУРАВЛЕВ

Шахматы

– Агент Малдер¹! Нам только что сообщили, что на чемпионате мира по шахматам стали происходить очень странные вещи. Во время трансляции матча на мониторах черные клетки доски хаотически перекрашиваются в белые и, наоборот, белые – в черные. После нескольких перекрасок все прекращается. Болельщики недоумевают, руководители федерации в панике, судьи поговаривают о новом компьютерном вирусе. Руководство ФБР подозревает, что рецидив может не ограничиться шахматными досками. Ведь скоро чемпионат мира по стокеточным шашкам!..

– Надо же – сколько замечательных событий!.. Но вы уверены, агент Скалли, что перекраска действительно является хаотической?

– Хороший вопрос, агент Малдер! Давайте-ка посмотрим полученные видеозаписи. Так и есть! Вы правы – перекраска происходит по определенному правилу. Одновременно с каждой клеткой перекрашиваются в противоположный цвет все ее соседи – клетки, имеющие с ней общую сторону.

– А вы заметили, Дана, что перекраска прекращается тогда, когда исходный цвет всех клеток доски меняется на противоположный?

– Неужели, агент Малдер, мы опять имеем дело с дуалистами?

– Кого вы имеете в виду?

– Фокс, это же одно из тайных обществ, считающих, что весь мир двуцветный. При этом для соблюдения баланса в мире необходимо совершать перекраску его объектов в противоположный цвет, придерживаясь определенных правил.

– А-а-а, понимаю... Кажется, упоминания о дуалистах находили в рукописях самого Леонардо да Винчи, а крашенные блондинки – яркие представители этого тайного общества...

– Не ерничайте, агент Малдер, лучше обратите внимание на перехват переговоров дуалистов, который я обнаружила по этому делу:

*За один ход разрешается одновременно перекрасить в противоположный цвет любую клетку шахматной доски, а также все клетки, имеющие с ней общую сторону. Можно ли за несколько ходов перекрасить в противоположный цвет все клетки доски?*²

– Как интересно! Но эти дуалисты, по моим агентурным данным, кроме прямоугольных, используют также доски весьма причудливой формы и совершенно произвольной начальной раскраски. Вот посмотрите на рисунок 1.

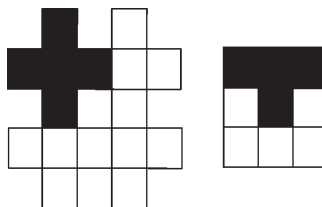


Рис. 1

– Вы попали в самую точку, агент Малдер! Они используют доски произвольной формы для доступа к своим базам данных. При этом кодами доступа являются определенные наборы ходов.

– Ну что, будем использовать хакеров для взлома парочки сайтов или обратимся к специалистам-теоретикам, чтобы разобраться с проблемой до конца? Что скажете, агент Скалли?

– Думаю, и то, и другое. Кроме того, подключим наших зарубежных коллег.

– Выходит, что все эти дуальные перекраски на произвольных досках не исследованы математиками нашего аналитического управления?

– По ряду случаев неплохо продвинулись русские, но у них возникли нерешенные вопросы³:

Вопрос 1. Существует ли хотя бы одна фигура из клетчатой бумаги (клетчатая доска), клетки которой нельзя перекрасить в противоположный цвет, как бы мы ни ходили? (Ход в клетку – это перекраска в противоположный цвет клетки и всех клеток, имеющих с ней общую сторону.)

Вопрос 2. Верно ли, что количество различных кодов доступа (наборов ходов, позволяющих перекрасить в противоположный цвет все клетки фигуры) для прямоугольника является целой неотрицательной степенью числа 2?

– Вы заметили, агент Скалли, что все примеры, которые мы встречали до настоящего времени, позволяли определить этот набор ходов или, как говорится, определить код доступа. Но можно было бы предположить, что есть пример фигуры, для которой кода доступа просто не существует, а бы даже сказал, не пример – а контрпример.

– Агент Малдер, а ведь дуалисты верят, что контрпримера нет!

¹ Фокс Малдер и Дана Скалли – персонажи сериала «X-files».

² Задача предлагалась в конкурсе имени А.П.Савина «Математика 6–8» в 2007/08 учебном году.

³ Ответы на другие вопросы из статьи И. Акулича «Призрак Леонардо» даны в статье «Раскраски графов и линейные уравнения» В.Дорофеева и А.Спивака

– В данном вопросе мы не можем полагаться на веру, нам нужны доказательства! Погодите-ка, вот пришло сообщение с Ближнего Востока. Похоже, они что-то откопали.

Графы

– Я же говорил, что во всех этих головоломках имеются скрытые связи. Все разнообразие досок и кодов дуалистов легко перекладывается на язык графов. В данном случае, агент Скалли, граф – это некоторое множество точек (*вершин*), при этом отдельные вершины соединены между собой не более чем одной дугой (*ребром*). Предлагается, что любая вершина сама с собой дугой не соединяется (в графе нет *петель*). Тогда на языке графов вопрос 1 можно переформулировать:

Пусть вершины графа окрашены в два цвета (черный и белый). За один ход разрешается одновременно перекрасить в противоположный цвет любую вершину графа и все смежные с ней вершины (соединенные с ней ребром). Можно ли за несколько ходов перекрасить в противоположный цвет все вершины графа?

– Я поняла. Каждую клетку фигуры вы заменяете вершиной графа. Если клетки являются соседями, то соединяете вершины ребром графа. Так каждой доске или фигуре из клеточек можно сопоставить граф.

– Точно, это называется обобщением первоначальной задачи. Теперь на языке графов мы можем рассматривать все приведенные ранее примеры.

– Как интересно, я подумала, что если в графе из каждой вершины выходит четное число ребер, то код доступа или раскраску для такого графа получить легко – нужно просто ходить в каждую вершину.

– Верное наблюдение, Дана! Кстати, агент Скалли, а ведь скан полученного древнего изображения с Ближнего Востока содержит доказательство отсутствия контрпримера! Я немного его адаптировал, и вот что получилось.

Докажем, что **код доступа всегда существует**, т.е. всегда можно перекрасить в противоположный цвет все вершины графа.

Заметьте, Дана, очередность ходов не играет никакой роли. Если вы выберете некоторый набор вершин для ходов, то тем самым определите конечную раскраску графа. Надеюсь, агент Скалли, вам знакомы рассуждения по индукции. С одной вершиной справиться легко – просто покрасим ее.

Предположим, что мы имеем соответствующий код доступа (набор ходов) для любого графа с n вершинами, и рассмотрим теперь граф с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$.

Отбросим временно некоторую вершину A_k , тогда мы получим граф с n вершинами, и для него, по нашему предположению, существует код доступа (необходимый набор ходов). Если вершина A_k связана с нечетным числом вершин из этого набора, то этот набор подойдет и для нашего графа с $n+1$ вершиной.

Однако возможен случай, когда для каждой вершины A_k , где $1 \leq k \leq n+1$, мы найдем такой код доступа (набор ходов) на оставшихся n вершинах, что A_k будет соединена с четным числом вершин из этого набора.

Заметьте, Дана: если в этом случае мы сделаем один за другим процессы перекраски для двух разных вершин $A_k \neq A_l$, то получим, что все вершины останутся с начальным цветом, кроме вершин A_k и A_l .

– Но ведь это означает, агент Малдер, что мы можем перекрасить в противоположный цвет любые две вершины, которые выберем, не меняя цвета остальных вершин.

– Совершенно верно! Осталась самая малость. Что делать, агент Скалли, если в графе четное число вершин?

– Тогда, агент Малдер, перекрасим каждую пару вершин в противоположный цвет, пока все они не изменят цвет на противоположный.

– А если в графе нечетное число вершин?

– Дайте подумать... В этом случае граф должен содержать вершину, у которой четное число соседних вершин. Иначе общее число «соседей» у всех вершин графа было бы нечетным, а это невозможно, поскольку общее число «соседей» в два раза больше чем количество ребер в графе.

Ага! Выберем эту вершину и перекрасим ее вместе с четным числом всех ее соседей. При этом окажется, что мы перекрасили в противоположный цвет нечетное число вершин. Так как в графе нечетное количество вершин, то остались непокрашенными четное количество вершин. Разобьем эти вершины по парам и перекрасим, как мы это уже обсуждали! – Вот и ответ на первый вопрос. Мы нашли строгое доказательство того, что код доступа всегда существует!

Группы

– Для поиска ответа на второй вопрос шеф отправляет нас в Европу. И все про какую-то теорию групп говорит. Что это за теория такая, никогда о ней не слышала. Она никак не связана с теорией заговора? К примеру, группа заговорщиков готовит переворот...

– Нет, агент Скалли, про теорию групп пишут в толстых учебниках, а про теорию заговора пишут в детективных и исторических романах. Впрочем, в нашем бюро недавно выпустили методичку по теории заговора...

– Иронизируете, агент Малдер! А ведь мы сейчас пытаемся раскрыть заговор дуалистов, и теория групп всего лишь инструмент в этой большой игре.

– С вами, агент Скалли, не поспоришь. Но вернемся к идее шефа. Ведь стоит только применить к нашим доскам теорию групп, и мы как на блодечке получаем ответ на второй вопрос. При этом имеет место даже более сильное утверждение, касающееся графов:

Для рассматриваемых графов количество различных кодов доступа (наборов ходов, позволяющих перекрасить в противоположный цвет все вершины графа) является целой неотрицательной степенью числа 2. Коды доступа мы считаем различными, если отличаются наборы вершин, куда сделаны ходы.

Это следует из известного всем алгебраистам факта, что порядок подгруппы делит порядок группы. Этот факт известен как теорема Лагранжа. Впрочем, для вас, агент Скалли, я нашел доказательство с применением элементарных методов.

Итак, агент Скалли, рассмотрим граф с n вершинами. Дальнейшие рассуждения мы могли бы проводить для любой фиксированной раскраски графа. Но не будем забивать себе голову и возьмем раскраску, при которой все вершины графа покрашены в белый цвет.

Рассмотрим множество всевозможных наборов ходов в вершины графа. Как по-вашему, агент Скалли, сколько их?

– Поскольку в любую вершину ход либо сделан, либо нет, то различных наборов ходов ровно 2^n . При подсчете я учла «нулевой» набор ходов, т.е. такой, при котором ни в одну вершину ходы не делаются.

– Хорошо. Теперь в этом множестве выделим подмножество наборов ходов, которые оставляют все вершины графа покрашенными в белый цвет, т.е. не меняют исходной раскраски графа. Количество элементов этого подмножества обозначим через s . Очевидно, что оно содержит «нулевой» набор, поэтому $s > 0$. Назовем это подмножество «нейтральным».

Далее разобьем все наборы ходов на классы. Будем считать, что два набора ходов принадлежат одному классу, если результаты их разрозненного применения к белой раскраске вершин графа (фиксированной раскраске) совпадают. Пусть k обозначает количество таких классов.

Как думаете, Дана, сколько может быть наборов в классе?

– Думаю, как повезет!

– Везение в нашей работе, конечно, очень важно. Однако в этой ситуации нам более важно, что во всех классах таких наборов одинаковое количество.

Сможете ли вы доказать, агент Скалли, что в каждом классе ровно s наборов ходов? Ну, хотя бы попробуйте разобраться...

Рассмотрим два набора ходов из одного класса. Обозначим их через h_1 и h_2 и рассмотрим их объединение (двойной ход в одну и ту же вершину графа в объединении двух наборов приравниваем к отсутствию хода).

Заметьте, что объединение наборов h_1 и h_2 лежит в нейтральном подмножестве. Действительно, каждая вершина после применения объединения h_1 и h_2 меняет цвет четное количество раз и, следовательно, исходная раскраска вершин графа не изменится.

Что получится, если набор ходов h_1 объединить с объединением h_1 и h_2 ?

– Очевидно, агент Малдер, что мы получим набор ходов h_2 .

– Значит, агент Скалли, h_2 получается объединением набора ходов h_1 с некоторым уникальным набором ходов из нейтрального подмножества. Следовательно, количество элементов в этом классе не больше, чем количество элементов из нейтрального подмножества, т.е. не больше чем s .

С другой стороны, если мы возьмем какой-нибудь набор ходов в некотором классе, то в этом классе лежит набор ходов, получающийся объединением исходного набора ходов с любым набором ходов из нейтрального подмножества. Следовательно, в этом классе число наборов не меньше чем s .

В итоге получаем, что в каждом классе ровно s наборов ходов. К слову сказать, и в классе, в котором находятся наборы ходов, перекрашивающие все вершины графа в противоположный цвет, также s элементов.

– Теперь все понятно. Все наборы ходов разбились на k классов по s элементов, т.е. $ks = 2^n$. Следовательно, и k и s являются степенями двойки. Что и требовалось доказать, агент Малдер! Осталось подготовить отчет для шефа...

Опять шахматы

– Неплохо мы все-таки поработали, да? Раскололи этих дуалистов! А ведь все, вроде бы, началось с шахмат...

– Шахматы! Какая фантастическая игра! Как их только не трансформируют... А вот, кстати, смотрю, – у вас на полочке рыритет с выставки в Париже. Гексагональные шахматы Глинского (рис.2). Можно посмотреть? Где взяли?

– Поклонники прислали...

– Странно, здесь одна ячейка неплотно прилегает... Да это тайник, а в нем – записка:

За один ход разрешается осуществлять одновременную перекраску любой клетки гексагональной шахматной доски и всех клеток, имеющих с ней общую сторону, с такой заменой цветов: белый → желтый → черный → белый. Можно ли за несколько ходов перекрасить все клетки доски в белый цвет?

На дуалистов не похоже, три цвета, все-таки. Что скажете, агент Скалли?

– Да, агент Малдер, это не дуалисты, это – плюралисты!

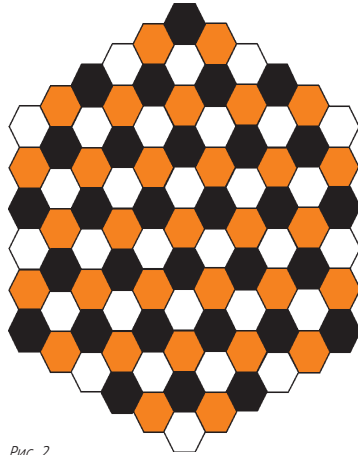


Рис. 2

Упражнения

1. Найдите последовательность ходов, перекрашивающую в противоположный цвет:

- цилиндрическую шахматную доску, склеенную из доски 8×8 (рис.3,а);
- тороидальную шахматную доску, склеенную из доски 8×8 (рис.3,б);
- доску в форме листа Мебиуса, склеенную из доски 8×8 (рис.3,в).

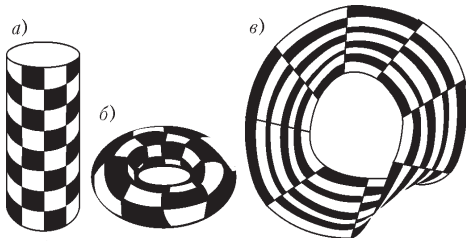


Рис. 3

Нарисуйте соответствующие графы.

2. За один ход разрешается одновременно перекрасить в противоположный цвет любую клетку доски, а также все клетки, в которые можно попасть из нее ходом коня. Найдите последовательности ходов, перекрашивающие в противоположный цвет клетки квадратных досок размеров 3×3 , 4×4 , и постройте соответствующие графы.

3. Приведите пример раскраски некоторой трехцветной гексагональной доски, все клетки которой нельзя перекрасить в один цвет.

4. Решите сформулированную в статье задачу для доски Глинского. Как, зная решение, при котором все клетки доски Глинского перекрашиваются в белый цвет, получить решение, при котором все клетки доски Глинского перекрашиваются в черный цвет?

5. Докажите, что если для произвольной трехцветной гексагональной доски соответствующее решение существует, то число этих решений является целой неотрицательной степенью числа 3.

Раскраски графов и линейные уравнения

В. ДОРОФЕЕВ, А. СПИВАК

Величайшие истины – самые простые.

Л.Н. Толстой

И. Ф. АКУЛИЧ РАССМОТРЕЛ РАСКРАСКИ ШАХМАТНОЙ доски и других клетчатых фигур, в которых каждая черная клетка граничит с четным числом черных клеток, а каждая белая граничит с нечетным числом черных. В статье «Призрак Леонардо» («Квант» №1 за 2008 год) он поставил несколько интересных вопросов, тесно связанных с системами линейных уравнений, решать которые надо «по модулю два» (четные числа соответствуют белому цвету, нечетные – черному).

Раскраски и системы сравнений

Напомним, о каких раскрасках идет речь. Рассмотрим произвольный конечный граф – например, изображенный на рисунке 1. Акулич спрашивает, можно ли покрасить некоторые

вершины так, чтобы у каждой покрашенной вершины было четное число покрашенных соседей (соседними называем вершины, соединенные ребром), а у каждой непокрашенной вершины – нечетное число покрашенных соседей.

Для некоторых графов он при помощи компьютера нашел все такие раскраски. Например, для графа рисунка 2 раскраска единственная, а на рисунке 3

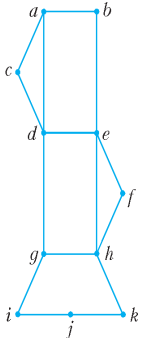


Рис. 1

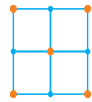


Рис. 2

изображены пять из 16 существующих раскрасок соответствующего графа – остальные получаются при помощи поворотов и осевых симметрий.

Найдем все раскраски для графа рисунка 1. Его вершины обозначены буквами. Присвоим значение 1 буквам, вершины которых покрашены, и 0 – тем, где не покрашены. Рассмотрим следующую систему сравнений, где знаки сравнения (три черточки вместо двух черточек привычного знака равенства) указывают, что нас интересует только четность (два числа сравнимы по модулю 2 в том и только том случае, когда

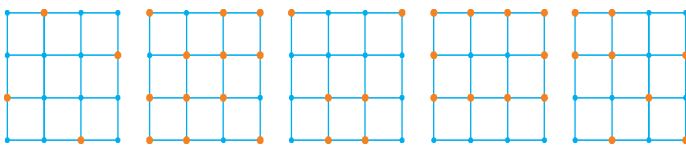


Рис. 3

их разность четна – кратна числу 2):

$$\begin{cases} a+b+c+d \equiv 1, \\ b+a+e \equiv 1, \\ c+a+d \equiv 1, \\ d+a+c+e+g \equiv 1, \\ e+b+d+f+h \equiv 1, \\ f+e+h \equiv 1, \\ g+d+h+i \equiv 1, \\ h+e+f+g+k \equiv 1, \\ i+g+j \equiv 1, \\ j+i+k \equiv 1, \\ k+j+h \equiv 1. \end{cases}$$

Вы еще не поняли, какое отношение система сравнений имеет к раскраскам Акулича? Посмотрите на первую строку: число $a+b+c+d$ нечетно либо в случае, когда $a=1$ и среди чисел b, c, d четное число единиц, либо в случае, когда $a=0$ и среди чисел b, c, d нечетное число единиц. Таким образом, первое сравнение системы выражает для вершины a условие «у каждой покрашенной вершины четное число покрашенных соседей, а у каждой непокрашенной вершины – нечетное число покрашенных соседей» из статьи «Призрак Леонардо».

Аналогична ситуация и для всех остальных строк системы: для каждой вершины графа в составленной нами системе есть соответствующая строка.

Последовательное исключение неизвестных

А теперь – простая, но очень важная идея: **любую систему линейных уравнений можно решить методом Гаусса последовательного исключения неизвестных**. Скептик скажет, что у нас не уравнения, а сравнения по модулю 2. Но это даже упрощает вычисления: для любого целого числа x , очевидно, $2x \equiv 0 \pmod{2}$ и $x \equiv -x \pmod{2}$.

Начинаем работу. Из первого сравнения выражаем

$$a \equiv b+c+d+1$$

(последний раз напоминаем, что все сравнения по модулю 2). Заменяя во всех других сравнениях (втором, третьем и четвертом) a на $b+c+d+1$ и упрощая, получаем систему

$$\begin{cases} c+d+e \equiv 0, \\ b \equiv 0, \\ b+e+g \equiv 0, \\ e+b+d+f+h \equiv 1, \\ f+e+h \equiv 1, \\ g+d+h+i \equiv 1, \\ h+e+f+g+k \equiv 1, \\ i+g+j \equiv 1, \\ j+i+k \equiv 1, \\ k+j+h \equiv 1. \end{cases}$$

Следовательно, $b=0$ и $c \equiv d+e$; получаем систему восьми сравнений

$$\begin{cases} e+g \equiv 0, \\ e+d+f+h \equiv 1, \\ f+e+h \equiv 1, \\ g+d+h+i \equiv 1, \\ h+e+f+g+k \equiv 1, \\ i+g+j \equiv 1, \\ j+i+k \equiv 1, \\ k+j+h \equiv 1. \end{cases}$$

Заметьте: для шага метода последовательного исключения неизвестных можно воспользоваться *любым* из сравнений системы; принципиального значения это не имеет. Идея метода в том, что мы из некоторого имеющегося сравнения выражаем любую из входящих в него переменных и, подставляя полученное выражение в остальные сравнения, уменьшаем тем самым количество неизвестных и сравнений; при этом могут образовываться сравнения вида $0 \equiv 0$, которые сразу отбрасываем.

Если бы образовалось сравнение $0 \equiv 1$, то из исходной системы сравнений мы получили бы противоречие. Такие системы называют несовместными – они не имеют ни одного решения. (Вскоре мы докажем, что для любого графа система, соответствующая раскраскам Акулича, совместна.)

Продолжим вычисления. Поскольку $e \equiv g$, получаем сами понимаем какую систему семи сравнений.

Обратите внимание: переменные a, b, c и e уже исчезли, сравнений тоже стало на четыре меньше. А теперь самостоятельно повторите наши вычисления. Поскольку вариантов, какие именно переменные выражать на очередном шаге, довольно много, договоримся: сначала выразите d , затем f, i, k, h и g .

Посчитали? Вот ответ: величина j – свободная переменная, она может принимать любое из двух возможных значений 0 и 1, а остальные переменные выражаются по формулам таблицы 1, в нижних двух строках которой приведены оба решения системы.

Таблица 1

j	$g \equiv 1$	$h \equiv j$	$k \equiv 1$	$i \equiv j$	$f \equiv j$	$d \equiv 0$	$e \equiv 1$	$c \equiv 1$	$b \equiv 0$	$a \equiv 0$
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0

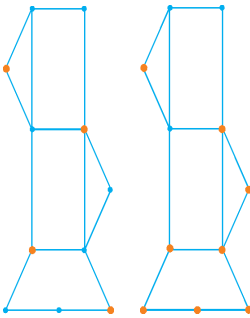


Рис 4

Рис 5

На рисунках 4 и 5 изображены соответствующие раскраски. В общем случае получаем 2^k раскрасок, где k – число свободных переменных; например, в случае $k = 0$ система имеет единственное решение.

Упражнения

1. Составьте и решите аналогичные системы для графа рисунка а) 2; б) 3.
2. Нарисуйте какой-нибудь граф, составьте систему сравнений Акулича, решите ее и нарисуйте все возможные раскраски Акулича.

3 (M665*). Световое табло состоит из нескольких ламп, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). На пульте несколько кнопок, при нажатии каждой из которых одновременно меняется состояние некоторого набора ламп (для каждой кнопки – своего). Вначале лампы не горят.

а) Докажите, что число различных узоров, которые можно получить на табло, – степень двойки.

б) Сколько различных узоров можно получить на табло, состоящем из m лампочек, расположенных в форме прямоугольника размером $m \times n$, если кнопками можно переключить как любой горизонтальный, так и любой вертикальный ряд ламп?

4 (M205*). 24 студента решали 25 задач. Преподаватель составил таблицу размером 24×25 , в которой записано, кто какие задачи решил. Докажите, что

а) можно отметить некоторые задачи «галочкой» так, что каждый из студентов решил четное число (в частности, может быть, нуль) из отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком «+», а некоторые из остальных – знаком «-» и приписать каждой задаче некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками «+» и «-».

Сумма степеней вершин

Доказательство того, что при решении системы мы не можем прийти к противоречию – сравнению $0 \equiv 1$, основано на следующем важном свойстве графов.

Лемма. Сумма степеней всех вершин графа четна.

Доказательство. Разрезав все ребра графа пополам, видно, что удвоенное число ребер равно сумме степеней всех вершин графа – например, для графа рисунка 1 получаем равенство

$$2 \cdot 15 = 3 + 2 + 2 + 4 + 4 + 2 + 3 + 4 + 2 + 2 + 2.$$

Следовательно, интересующая нас сумма четна; лемма доказана.

Совместность системы

Теперь докажем, что в процессе решения системы, соответствующей раскраскам Акулича, не получится сравнение $0 \equiv 1 \pmod{2}$.

Если мы складываем несколько сравнений системы (а ничего другого по сути мы делать не можем: все операции исключения неизвестных, как легко сообразить, являются по сути операциями почленного сложения – так уж замечательно устроены сравнения по модулю 2), то для получения в правой части единицы мы должны сложить нечетное число сравнений.

Рассмотрим подграф исходного графа, вершины которого – «центры» складываемых сравнений. Для получения в левой части нулевого коэффициента при каждой из соответствующих переменных степени всех вершин рассматриваемого подграфа должны быть нечетны. Но в силу леммы не существует ни одного графа с нечетным числом вершин, степени которых все нечетны.

Таким образом, для математика ответы на большинство вопросов статьи Акулича кратко можно выразить тремя фразами: его раскраски – это решения систем линейных уравнений; система уравнений над полем вычетов по модулю два либо имеет 2^k решений, где k – число свободных неизвестных, либо несовместна; система совместна вследствие того, что в графе, степени всех вершин которого нечетны, количество вершин обязательно четное.

Упражнение 5. Рассмотрим граф. Первоначально все его вершины покрашены в белый цвет. Рассмотрим операции следующего вида: выбираем любую вершину и одновременно перекрашиваем в противоположный цвет ее саму и всех ее соседей. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно перекрасить все вершины графа в черный цвет.

Разность двух раскрасок Акулича

Любая система линейных уравнений обладает тем свойством, что если (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) – ее решения, то $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$ – решение системы, которая получается из данной нам системы заменой всех чисел правой части на нули (докажите!). В нашем случае это соответствует тому, что для любых двух разных раскрасок Акулича при их наложении (по принципу «дважды красить – то же самое, что ни разу не красить») получается раскраска, в которой каждая окрашенная вершина соседствует с нечетным числом

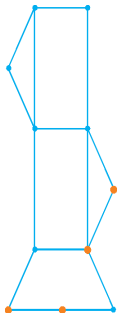


Рис. 6

окрашенных, а каждая неокрашенная – с четным числом окрашенных.

Например, вычитая из раскраски рисунка 5 раскраску рисунка 4, получаем раскраску рисунка 6.

Упражнения

6. На рисунке 7 изображены (с точностью до поворотов и осевых симметрий) все возможные варианты для раскрасок упражнения 1 б), кроме той, в которой нет ни одной покрашенной вершины. Убедитесь в этом.

7. Количество раскрасок Акулича равно количеству раскрасок, в которых у каждой покрашенной вершины нечетное число покрашенных соседей, а у каждой непокрашенной вершины – четное число покрашенных соседей. Докажите это.

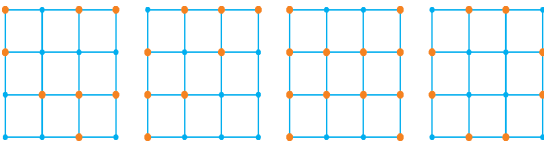


Рис. 7

Без систем уравнений

Докажем без использования систем уравнений существование для любого графа хотя бы одной раскраски Акулича. Рассуждаем по индукции. Для графа с одной вершиной утверждение очевидно: достаточно ее покрасить.

Предположим, что раскраска Акулича существует для любого графа с n вершинами, и рассмотрим граф с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$. Отбросив некоторую вершину A_k , получим граф с n вершинами. Для него существует хотя бы одна раскраска Акулича. Если в некоторой такой раскраске с вершиной A_k связано нечетное число покрашенных вершин, то искомая раскраска Акулича для графа с $n + 1$ вершинами построена.

Осталось разобрать случай, когда для каждой вершины A_k , где $1 \leq k \leq n + 1$, мы нашли такую раскраску Акулича C_k графа на остальных n вершинах, что A_k соединена с четным числом покрашенных вершин. Если n нечетно, то искомую раскраску получаем, суммируя $n + 1$ таких раскрасок $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ (суммируем по модулю 2, т.е. красим те и только те вершины, которые оказались окрашены в нечетном числе из рассматриваемых $n + 1$ раскрасок). (Подумайте, почему!)

Если же n четно, то в силу леммы о сумме степеней вершин существует хотя бы одна вершина A_k четной степени. Искомую раскраску получаем, складывая раскраску, в которой A_k покрашена, а остальные вершины не покрашены, с раскрасками, построенными для ее соседей. (Опять-таки подумайте, почему!)

Пятый вопрос Акулича

История не повторяется – это истории повторяют друг друга.

Рассмотрим граф, вершины которого – центры прямоугольника размером $m \times n$, а соседними считаем центры клеток, имеющих общую сторону. Сколько для него существует раскрасок Акулича, выяснить непросто. Пятый вопрос статьи «Признак Леонардо» звучит так: «Существует ли такое m , что для любого n раскраска единственна?»

Ответ отрицательный. Более того, для любого m существует такое n , что количество раскрасок равно 2^m . Более того, для каждого данного m множество таких n бесконечно!

Чтобы это доказать, раскрасим m клеток крайнего левого столбца произвольным образом. Очевидно, условие Акулича «у каждой покрашенной вершины четное число покрашенных соседей, а у каждой непокрашенной вершины – нечетное число покрашенных соседей» однозначно определяет второй столбец, первый и второй столбцы определяют третий и так далее.

Например, для $m = 2$ дело обстоит так, как показано в таблице 2. При $m = 3$ – так, как в таблице 3. А при $m = 4$ – так, как в таблице 4. Доказать, что при любом m в таблице бесконечно много столбцов, состоящих только из нулей (это и означает, что для соответствующих n количество раскрасок Акулича равно 2^m), довольно просто. Достаточно рассмотреть всевозможные пары соседних столбцов (B, C) . По каждой такой паре однозначно строится следующий столбец D . Таким образом, задано отображение $(B, C) \rightarrow (C, D)$.

Таблица 2

a	$a + b + 1$	$a + 1$	0	a	$a + b + 1$	$a + 1$	0	...
b	$a + b + 1$	$b + 1$	0	b	$a + b + 1$	$b + 1$	0	...

Поскольку множество пар столбцов конечно, то с какой бы пары столбцов мы ни начали, рано или поздно произойдет заикливание.

Возникший цикл не может обладать хвостом (предприодом) вроде того, что изображен на рисунке 8. Дело в том, что

Таблица 3

a	$a + b + 1$	$a + c + 1$	$b + c + 1$	$c + 1$	0	c	$b + c + 1$...
b	$a + b + c + 1$	0	$a + b + c$	$b + 1$	0	b	$a + b + c + 1$...
c	$b + c + 1$	$a + c + 1$	$a + b + 1$	$a + 1$	0	a	$a + b + 1$...

Таблица 4

a	$a + b + 1$	$a + c + 1$	$b + c + d + 1$	0	$b + c + d$	$a + c + 1$	$a + b + 1$...
b	$a + b + c + 1$	d	$a + b + d + 1$	0	$a + b + d$	$d + 1$	$a + b + c$...
c	$b + c + d + 1$	a	$a + c + d + 1$	0	$a + c + d$	$a + 1$	$b + c + d$...
d	$c + d + 1$	$b + d + 1$	$a + b + c + 1$	0	$a + b + c$	$b + d + 1$	$c + d + 1$...

пара столбцов (B, C) однозначно определяет не только следующий за ними столбец D , но и предшествующий им столбец A : ситуация $A_1 \neq A_2$ невозможна!

Осталось вспомнить, что к рассматриваемой нами таблице слева с соблюдением правила «у каждой покрашенной вершины четное число покрашенных соседей, а у каждой непокрашенной – нечетное» можно приписать только столбец из одних нулей. Значит, когда произойдет заикливание, мы вновь увидим нулевой столбец.

Таким образом, для математика ответ на пятый вопрос статьи Акулича таков: любое взаимнооднозначное отображение конечного множества в себя (короче говоря, перестановка) разлагается на циклы, и среди этих циклов не может быть ни одного цикла с хвостом.

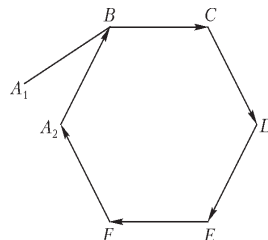


Рис. 8

Упражнения

8. Постройте такого рода таблицу для а) $n = 5$; б) $n = 6$.
9. Существует бесконечно много чисел Фибоначчи, десятичная запись которых оканчивается на шесть нулей. Докажите это.
10. Нужно построить из одинаковых по размеру белых и черных кубиков сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый черный кубик башни граничил с четным числом белых, а каждый белый – с нечетным числом черных. Докажите, что для любого нижнего слоя можно построить такую башню конечной высоты.

Второй вопрос Акулича

При $m = n \leq 28$ количество раскрасок Акулича, как он проверил при помощи компьютера, является не только степенью числа 2, но и степенью числа 4 (т.е. соответствующая размерность k четна). Причин для такого явления не видно, однако и отвергать с порога его наблюдение не будем. Любящие компьютер читатели могут заняться составлением соответствующих таблиц и вычислением k для других значений $m = n$. Интересно, встретится ли нечетное значение k ? И какова ситуация для других графов?

Плюсы и минусы

На II Всесоюзной олимпиаде (1968 год) была предложена следующая задача: В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены плюсы и минусы, как показано на рисунке 9. Разрешено одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажем, что сколько ни проводи таких перемен, таблицу из одних плюсов не получим.

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис. 9

	■	■	
■			■
■			■
	■	■	

Рис. 10

Решение – на рисунке 10: каждая прямая, параллельная сторонам или диагоналям квадрата, пересекает четное число из восьми зеленых клеток. Поэтому четность количества минусов, стоящих в этих клетках, при рассматриваемых операциях не меняется.

Упражнения

11. В клетках квадратной таблицы 8×8 расставлены плюсы, за исключением одной не угловой клетки, в которой стоит минус. Разрешено одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). а) Докажите, что сколько ни проводи таких перемен, таблица из одних плюсов не получится. б) Сколько разных расстановок знаков можно получить из одной данной расстановки при помощи рассматриваемых операций?
12 (M109). а) В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$ стоит знак минус, а в остальных – плюсы. Разрешено одновременно менять знак на противоположный в любых последовательных а) шести; б) четырех; в) трех вершинах многоугольника. Докажите, что при помощи таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах – плюсы.
13. На пульте находятся 100 светящихся кнопок, расположенных в виде квадрата 10×10 . Табло устроено так, что при

нажатии на любую кнопку она и все кнопки одного с ней ряда и все кнопки одного с ней столбца меняют свое состояние: светившиеся гаснут, а не светившиеся загораются. Какое наименьшее число кнопок нужно нажать, чтобы все кнопки оказались погашенными, если первоначально все светились?

14 (XXV Турнир городов).

- а) В таблице $m \times n$ расставлены знаки «+» и «-». За один ход разрешается менять знаки на противоположные в любой строке или любом столбце. Докажите, что если такими действиями таблица не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат 2×2 , который тоже не приводится.
б) В таблице $m \times n$ расставлены знаки «+» и «-». За один ход разрешается менять знаки на противоположные в любой строке или любом столбце или на любой диагонали (угловые клетки тоже считаются диагоналями). Докажите, что если такими действиями таблица не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат 4×4 , который тоже не приводится.

Лампы на табло

Итак, избавиться от одного минуса внутри «зеленого множества» (см. рис.10) невозможно. А если нет ни одного «зеленого множества»?

Только давайте от прямоугольной таблицы и плюсов-минусов перейдем в антураж задачи Московской олимпиады 1995 года. Там речь шла о лампах и кнопках. Каждая кнопка соединена с одной или несколькими лампами. Нажатие на кнопку меняет состояние лампы, с которой она соединена. Спрашивалось, всегда ли можно погасить все лампы, нажимая на кнопки? Оказывается, если нет ни одного «зеленого множества», то всегда!

Теорема. Если для любого непустого множества ламп существует кнопка, соединенная с нечетным числом ламп из этого набора, то при помощи нажатий на кнопки можно погасить все лампы.

Доказательство. Результат нажатия нескольких кнопок не зависит от порядка их нажатия. Применим индукцию по количеству ламп.

Сначала, как положено, база индукции: пусть лампа одна. Поскольку должна существовать кнопка, соединенная с нечетным числом ламп, то некоторая кнопка управляет в точности одной этой лампой.

Теперь – индукционный переход. Пусть утверждение доказано для n ламп и любой удовлетворяющей условиям теоремы системы кнопок. Рассмотрим лампы $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$, некоторые из которых горят. Временно исключим из рассмотрения некоторую лампу A_k , где $1 \leq k \leq n+1$. По предположению индукции, можно при помощи некоторого набора кнопок погасить все горящие лампы из n рассматриваемых нами сейчас ламп. Если после этих нажатий на кнопки лампа A_k не горит, то мы добились своего.

Значит, осталось рассмотреть ситуацию, когда лампа A_k светится, а все остальные – нет. Рассмотрим $m \neq k$, где $1 \leq m \leq n+1$. В силу предположения индукции, все лампы, кроме A_m , можно погасить. Если при этом погаснет и A_m , то дело сделано.

Остался случай, когда A_m горит, а остальные лампы – нет. К нему мы пришли из ситуации, когда горела только лампа A_k . Таким образом, при помощи имеющегося набора кнопок мы для любых $m \neq k$ можем гасить лампу A_k и зажигать A_m , не меняя состояния других ламп. Рассмотрим теперь какую-нибудь кнопку K , соединенную с нечетным числом ламп, и выберем какую-нибудь лампу L , соединенную с K . Погасим все лампы, кроме L . Наждем кнопку K . Теперь горит четное число ламп; погасим их парами.

Свет в неоднородной среде

В. МАЙЕР, Е. ВАРАКСИНА

ОПТИЧЕСКИ ОДНОРОДНОЙ СЧИТАЕТСЯ СРЕДА, ПОКАЗАТЕЛЬ преломления которой во всех точках имеет одно и то же значение. В такой среде свет распространяется прямолинейно. Соответственно, среда оптически неоднородна, если показатель преломления меняется от точки к точке. Быстрота его изменения в определенном направлении характеризуется градиентом показателя преломления. В среде с градиентом показателя преломления свет распространяется криволинейно. Раздел оптики, изучающий явления, происходящие в оптически неоднородных средах, принято называть градиентной оптикой.

Оборудование и материалы для экспериментальных исследований. Оптически неоднородную среду проще всего сделать жидкой. Для этого нужно в отдельных сосудах приготовить чистую отстоявшуюся воду и насыщенные водные растворы поваренной соли NaCl и мочевины $(\text{NH}_2)_2\text{CO}$. Все три жидкости следует слегка подкрасить флуоресцентном так, чтобы они имели одинаковые зеленоватые оттенки. Жидкости можно послойно вводить в плоскопараллельную прозрачную кювету с внутренним размером примерно $40 \times 150 \times 500$ мм. Вначале наливают менее плотную жидкость. Затем на дно кюветы через резиновый шланг, соединенный с большой воронкой, осторожно добавляют более плотную жидкость. В качестве источника света лучше всего использовать маломощный полупроводниковый лазер, дающий пучок зеленого света.

Полное внутреннее отражение света. Залейте в кювету подкрашенную флуоресцентном воду. Включите полупроводниковый лазер и направьте узкий пучок зеленого света на боковую стенку кюветы под произвольным углом к поверхности воды. Посмотрев сбоку, вы увидите, как пучок распространяется в слое воды, несколько раз отражаясь от его верхней и нижней границ. На первой фотографии, приведенной на рисунке 1, видно, что пучок лазерного света падает на поверхность воды снизу под столь большим углом, что на протяжении кюветы отражается лишь один раз. Две следующие фотографии сделаны для случаев, при которых угол падения света на поверхность воды последовательно уменьшается. При этом свет распространяется внутри плоскопараллельного слоя воды, не выходя за его пределы, поскольку испытывает полное внутреннее отражение от верхней и нижней границ этого слоя.

Напомним, что если свет переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную, то угол преломления всегда больше угла падения. При увеличении угла падения растет угол преломления, увеличивается интенсивность отраженного пучка и уменьшается интенсивность преломленного. Тот угол падения, при котором угол преломления был бы равен $\pi/2$, если бы преломленный пучок существовал, называется предельным. Однако при всех углах падения, равных и превышающих предельный, преломленного пучка вообще нет, а имеется лишь отраженный

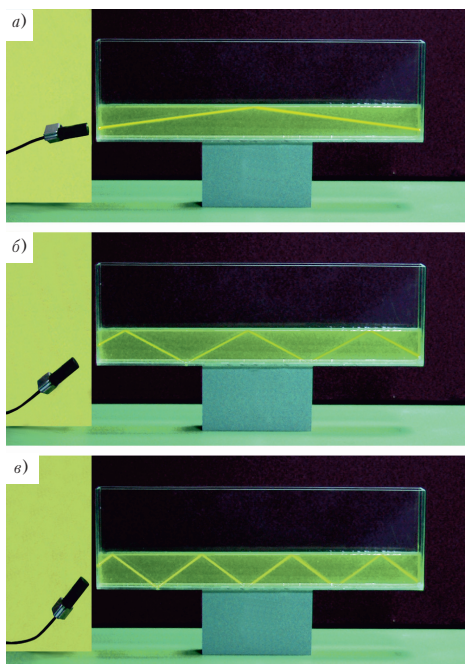


Рис.1. Полное внутреннее отражение светового пучка при различных углах падения

пучок. Это явление и называется полным внутренним отражением света.

Распространение света в оптически неоднородной среде. В кювету налейте воду и на дно кюветы введите насыщенный водный раствор поваренной соли. За счет перемешивания и диффузии на границе между соленой и пресной водой образуется слой оптически неоднородной жидкости, показатель преломления в котором плавно уменьшается в направлении снизу вверх. На боковую стенку кюветы направьте узкий пучок зеленого света от полупроводникового лазера. Вы увидите, что, войдя в слой оптически неоднородной жидкости, световой пучок искривляется, изгибаясь в сторону увеличивающихся значений показателя преломления, а вне этого слоя распространяется прямолинейно (рис.2).

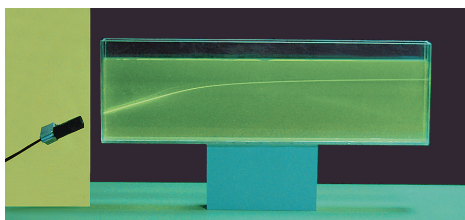


Рис.2. Искривление пучка света при распространении через оптически неоднородную среду

Качественное объяснение явления вы без труда получите, применив принцип Гюйгенса и приняв во внимание, что абсолютный показатель преломления равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в веществе: $n = c/v$.

Поворачивайте источник света так, чтобы угол падения света на переходный слой между жидкостями увеличивался. Вы обнаружите, что при определенном угле падения происходит полное внутреннее отражение света в оптически неоднородной среде с плавным изменением показателя преломления, причем свет распространяется криволинейно (рис.3).

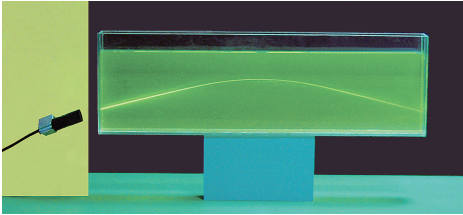


Рис.3. Полное внутреннее отражение светового пучка в оптически неоднородной среде

Пучок света, выпуклый вниз. В только что рассмотренном эксперименте для получения оптически неоднородной жидкости водный раствор поваренной соли был введен в кювету ниже слоя пресной воды. Плотность соленой воды больше плотности пресной, поэтому такая система механически устойчива. Оптическая плотность соленой воды также больше, чем пресной, поэтому показатель преломления в переходном слое плавно уменьшается в направлении снизу вверх, а световой пучок изгибается в направлении сверху вниз. В результате наблюдается пучок, выпуклый вверх (см. рис.3). А что нужно сделать, чтобы световой пучок оказался выпуклым вниз?

Понятно, что для этого показатель преломления оптически неоднородной жидкости сверху должен быть больше, чем снизу. Чтобы система из двух таких жидкостей оказалась механически устойчивой, сверху должна быть расположена менее плотная жидкость. Но эта менее плотная жидкость должна быть оптически более плотной. Есть ли такие жидкости? Самое время вспомнить о насыщенном водном растворе мочевины: оптическая плотность его больше, чем оптическая плотность насыщенного водного раствора поваренной соли, а обычная плотность – меньше.

Итак, в плоскопараллельную стеклянную кювету налейте насыщенный раствор мочевины и затем через резиновый шланг на дно кюветы введите насыщенный раствор поваренной соли. Направьте на переходный слой между жидкостями световой пучок сверху вниз, и вы увидите, как он плавно отклонится вверх (рис.4). Разумеется, для получения нужного результата вам придется подобрать соответствующий угол падения света.

Цепная линия. Для дальнейшего нам потребуются несколько формул. Мы достанем их из элементарной матема-

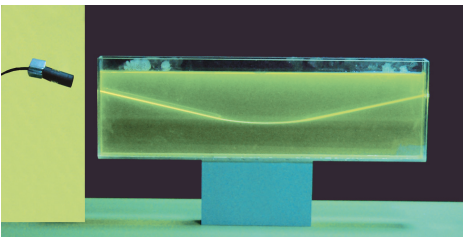


Рис.4. Искривление пучка света в оптически неоднородном слое между насыщенными растворами поваренной соли и мочевины

тики примерно так же, как фокусник, не объясняя сути фокуса, достает из своей шляпы кролика. Каждый из вас, безусловно, знает, что такое число e . С ним связаны многие математические функции. В частности, гиперболический косинус:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

и гиперболический синус:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Очевидно, что для гиперболических синуса и косинуса справедливо соотношение

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Кроме того, легко видеть, что производная от гиперболического косинуса равна гиперболическому синусу:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x.$$

С помощью компьютера постройте график функции $y = \operatorname{ch} x$, причем масштабы по осям декартовой системы координат выберите одинаковыми. Распечатайте получившийся график на листе бумаги и закрепите его на вертикально расположенной картонке или на магнитной доске. Затем возьмите в руки тонкую металлическую цепочку и расположите ее рядом с графиком так, чтобы цепочка свободно висела, закрепленная в двух точках графика, лежащих на одной горизонтальной прямой. Изменяйте длину цепочки, и у вас обязательно получится, что цепочка расположится

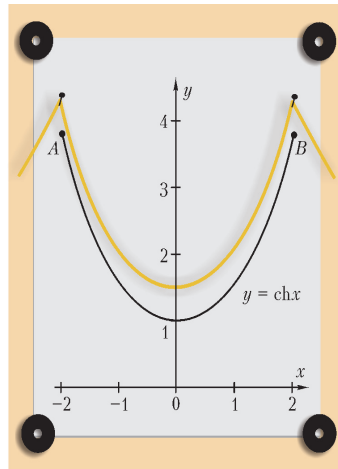


Рис.5. Сравнение графика функции гиперболического косинуса с формой свободно висающей цепочки

точно по линии графика. На рисунке 5 приведена фотография описанного опыта, в котором цепочка несколько поднята над графиком, чтобы можно было их сравнить. Таким образом, опыт показывает, что в поле тяжести Земли закрепленная в двух точках цепь висит так, что принимает форму графика гиперболического косинуса. Именно поэтому такой график называют цепной линией.

Уравнение светового луча. Теперь попробуем вывести уравнение светового луча в среде, показатель преломления которой линейно зависит от координаты.

В оптически неоднородной среде направим свет в сторону

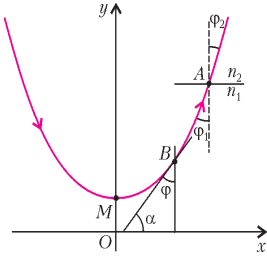


Рис.6. К выводу уравнения светового луча

показатель преломления равен нулю; через эту точку перпендикулярно оси y проведем ось x . Будем считать, что показатель преломления увеличивается в направлении оси y по линейному закону:

$$n = ky,$$

где $k = \text{const}$ – постоянный коэффициент пропорциональности. Величина k имеет физический смысл скорости изменения показателя преломления среды n в направлении оси y и называется градиентом показателя преломления:

$$k = \frac{dn}{dy}.$$

Для произвольной точки A луча по закону преломления имеем

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ или } n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 – углы падения и преломления на границе раздела слоев с показателями преломления n_1 и n_2 соответственно. Это равенство справедливо и для той точки луча M , для которой угол падения $\varphi = \pi/2$. Поэтому вообще

$$n \sin \varphi = n_0 = \text{const},$$

где φ – угол входа луча в слой с показателем преломления n , а n_0 – показатель преломления среды в том слое, от которого свет испытывает полное внутреннее отражение.

Найдем угол наклона α касательной в произвольной точке B луча. Из геометрических соображений,

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \varphi} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{n^2 - n_0^2}}{n_0} = \frac{\sqrt{y^2 - n_0^2/k^2}}{n_0/k}.$$

Покажем, что траекторией луча является цепная линия (гиперболический косинус). В системе координат xOy уравнение цепной линии, симметричной относительно оси ординат, очевидно, имеет вид

$$y = a \text{ ch } \frac{x}{a},$$

где a – некоторый коэффициент, имеющий размерность длины. Угол наклона α касательной к цепной линии определяется первой производной от этой функции:

$$\text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx} = \text{sh } \frac{x}{a} = \sqrt{\text{ch}^2 \frac{x}{a} - 1} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}.$$

Сравнивая два полученных выражения для $\text{tg } \alpha$, видим, что первые производные для обеих кривых совершенно одинаковы, если положить, что $a = n_0/k$. Раз одинаковы производные, то, с точностью до постоянного слагаемого, одинаковы и первообразные. Отсюда получаем уравнение луча:

$$y = \frac{n_0}{k} \text{ ch } \frac{k}{n_0} x + C.$$

уменьшающихся значений показателя преломления. Опыт показывает, что при этом световой луч изогнется и обозначит симметричную кривую (рис.6). Проведем ось y так, чтобы она совпала с осью симметрии кривой, направим ось в сторону роста показателя преломления и выберем начало координат в точке O , где

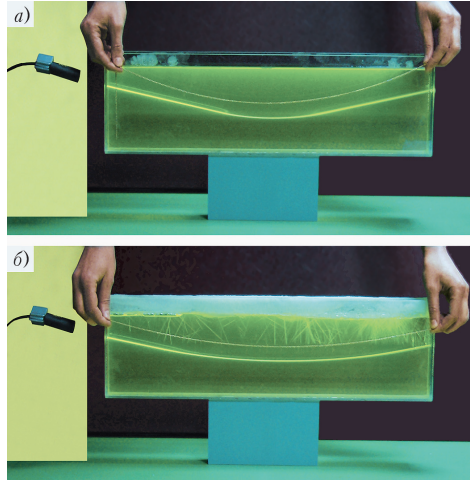


Рис.7. Сравнение траектории пучка света в оптически неоднородной среде с цепной линией

Значение постоянной C найдем из очевидного условия, что при $x = 0$ $\varphi = \pi/2$, $n = n_0$ и $y = n_0/k$, значит, $C = 0$. Таким образом, окончательно уравнение луча имеет вид

$$y = \frac{n_0}{k} \text{ ch } \frac{k}{n_0} x.$$

Итак, в оптически неоднородной среде с постоянным градиентом показателя преломления свет распространяется по цепной линии.

Свет в среде с постоянным градиентом показателя преломления. Полученный теоретический результат нетрудно проверить в эксперименте, когда показатель преломления жидкости внизу меньше, чем сверху.

Возьмите в руки цепочку и поместите ее перед кюветой, в которой распространяется световой пучок. Вы увидите, что цепочка располагается примерно так же, как идет световой пучок (рис.7,а). Примерно, но не точно. Значит (мы безоговорочно верим правильной математике), хотя использованная для опыта среда и неоднородна оптически, но градиент показателя преломления в ней не постояен. Оставьте кювету с жидкостями на ночь и утром повторите опыт. Вы обнаружите, что теперь цепная линия в точности совпадает с траекторией светового луча (рис.7,б).

Отсюда следует, во-первых, что построенная нами математическая модель явления соответствует действительности, а во вторых, что за несколько часов благодаря взаимной диффузии жидкостей в переходном слое между ними градиент показателя преломления стал практически постоянным.

Волновое распространение света. В проделанных опытах вы сумели изогнуть световой пучок и вверх, и вниз. Значит, при желании вы сможете заставить распространяться свет и волнообразно, последовательно изгибаясь в ту и другую сторону. Для этого нужно залить в кювету сначала воду, затем водный раствор мочевины и, наконец, водный раствор поваренной соли. Вы, конечно, помните, что наливать один раствор поверх другого нельзя – растворы просто перемешаются. Нужно жидкость большей плотности тонкой струей вводить на дно кюветы под жидкость меньшей плотности. Так вы получите модель градиентного световода, или волновода. Направив в торец кюветы узкий световой пучок, вы без труда сможете подобрать точку и угол входа пучка

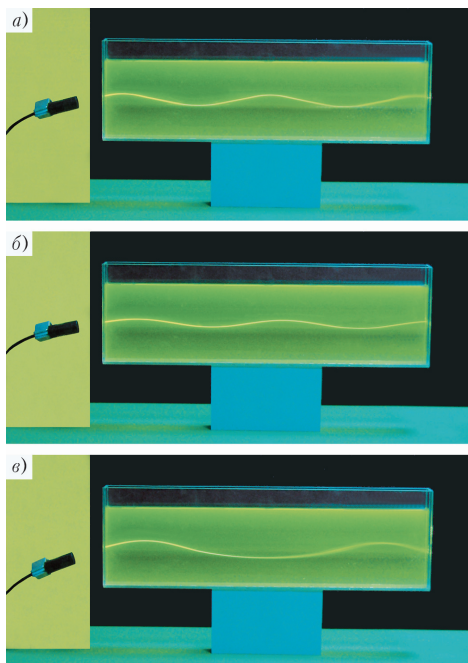


Рис.8. Волноводное распространение света в оптически неоднородном слое жидкости при разных углах падения на торец кюветы

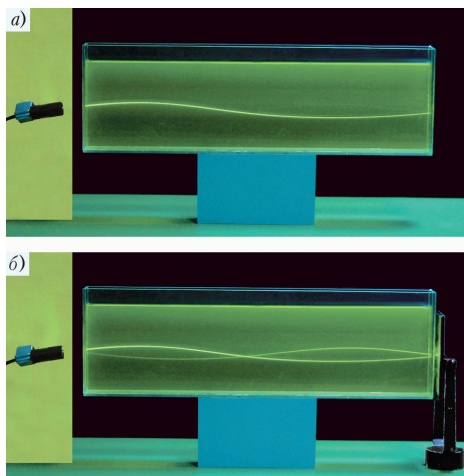


Рис.9. Волноводное распространение света в оптически неоднородном слое жидкости спустя сутки после приготовления этого слоя; на нижней фотографии вышедший из кюветы пучок отражается от плоского зеркала обратно в кювету

так, чтобы свет в оптически неоднородном световоде распространялся волнообразно. Возможные варианты результатов этого опыта представлены на рисунках 8 и 9.

Если вас не приведут в восторг эти замечательные оптические явления, то никакие слова уже не помогут!

Определение периода колебаний: динамический и энергетический подходы

А. ЧЕРНОУЦАН

ВАЖНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ЛЮБОЙ СИСТЕМЫ – МЕХАНИЧЕСКОЙ, ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ ИЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ – является частота (или период) малых гармонических колебаний около положения равновесия. Для определения частоты используют два основных подхода.

1. Динамический подход. Записывают уравнение движения тела и, опираясь на малость колебаний, приводят его к виду уравнения гармонических колебаний

$$x'' + \gamma x = 0, \quad (1)$$

где x – параметр, определяющий положение тела или состояние системы (смещение тела от положения равновесия, угол отклонения маятника, заряд конденсатора в колебательном контуре), причем в положении равновесия $x = 0$. Решение этого уравнения как раз и представляет собой гармонические колебания

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где амплитуда A и начальная фаза φ_0 определяются из начальных условий, а циклическая частота колебаний равна $\omega = \sqrt{\gamma}$. Для движения тела массой m обычно находят возвращающую силу, которая при малых x почти всегда (за исключением некоторых особых случаев) пропорциональна смещению x :

$$F_x = -k_{\text{эф}} x.$$

Уравнение движения $ma_x = F_x$ имеет такой же вид, как для груза на пружине, поэтому $k_{\text{эф}}$ называют эффективной жесткостью, уравнение гармонических колебаний принимают вид

$$x'' + \frac{k_{\text{эф}}}{m} x = 0$$

и циклическая частота и период малых колебаний выражаются через m и $k_{\text{эф}}$:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{эф}}}}.$$

2. Энергетический подход. Если система консервативная, то, выбрав параметр x , выражают потенциальную энергию груза на пружине, поэтому $k_{\text{эф}}$ называют эффективной жесткостью, уравнение гармонических колебаний принимают вид

$$k_{\text{эф}} \frac{x^2}{2} + m_{\text{эф}} \frac{x^2}{2} = E = \text{const} \quad (2)$$

(за ноль потенциальной энергии принимают энергию в положении равновесия). Можно показать (взяв производ-

ную по t от правой и левой частей этого уравнения), что в этом случае движение подчиняется уравнению гармонических колебаний (1), где $\gamma = k_{\text{эф}}/m_{\text{эф}}$ ($\omega = \sqrt{k_{\text{эф}}/m_{\text{эф}}}$). Если рассматривается движение одного тела массой m , а x – его смещение от положения равновесия, то $m_{\text{эф}} = m$ и ответ получается таким же, как и при динамическом подходе. Однако если x – это, например, угол отклонения маятника или заряд конденсатора или если система состоит из нескольких материальных точек, которые движутся по-разному (см. задачу 10), то $m_{\text{эф}}$ может отличаться от массы системы.

Как будет видно из дальнейшего, динамический подход является основным для исследования колебаний, особенно в тех случаях, когда энергию записать или сложно, или вообще невозможно (если, например, система не консервативная). Однако в некоторых важных случаях энергетический подход оказывается более удобным, а вот уравнение движения записать затруднительно (в рамках школьной физики).

Начнем с хорошо известного примера – обычного математического маятника – и проанализируем его в рамках каждого из двух подходов.

Математический маятник – динамический подход. Уравнение движение маятника запишем в проекциях на касательное направление (т.е. для тангенциальной составляющей ускорения, что знакомо с этим понятием):

$$mx'' = F_x, \quad F_x = -mg \sin \alpha = -mg \sin \frac{x}{l},$$

где x – длина дуги (рис.1). Для малых α , т.е. для $x/l \ll 1$, получаем

$$F_x = -mg \frac{x}{l}, \quad x'' + \frac{g}{l} x = 0,$$

откуда следует

$$k_{\text{эф}} = \frac{mg}{l}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Математический маятник – энергетический подход. Кинетическая энергия маятника равна

$$E_k = m \frac{x^2}{2},$$

т.е. $m_{\text{эф}} = m$, а потенциальная энергия равна

$$E_{\text{п}} = mgh = mgl(1 - \cos \alpha) =$$

$$= 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2} = mgl \frac{\alpha^2}{2} = \frac{mg}{l} \frac{x^2}{2}.$$

Получаем такой же ответ для $k_{\text{эф}}$, а значит, и такой же ответ для частоты колебаний, как при динамическом подходе.

Рассмотрим несколько задач, где преимуществом обладает динамический подход, а энергетический подход либо менее удобен, либо вообще неприменим.

Задача 1. Посередине легкого шнура длиной $2l$ закреплен маленький груз массой m (рис.2). Считая натяжение шнура постоянным и равным F , найдите период малых поперечных колебаний груза. Силу тяжести не учитывать.

Решение. При отклонении груза на малое расстояние x в поперечном направлении

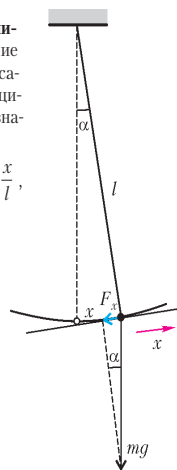


Рис. 1

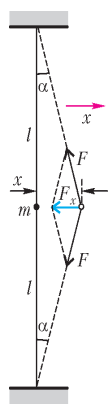


Рис. 2

возникает возвращающая сила, равная равнодействующей двух сил натяжения:

$$F_x = -2F \sin \alpha = -2F \frac{x}{l} = -\frac{2F}{l} x,$$

откуда получаем

$$k_{\text{эф}} = \frac{2F}{l}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{эф}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2F}}.$$

Если учесть изменение силы натяжения за счет удлинения шнура, то получим поправку более высокого порядка малости.

Энергетический подход здесь возможен, но неудобен, к тому же вычисление потенциальной энергии шнура с постоянным натяжением не является привычным.

Задача 2. Полупустая бутылка массой m плавает в воде в вертикальном положении. Найдите частоту малых вертикальных колебаний бутылки, если площадь сечения бутылки на уровне «ватерлинии» равна S .

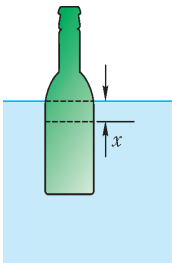


Рис 3

Решение. В положении равновесия сила тяжести бутылки уравновешивается силой Архимеда. При дополнительном погружении бутылки на малое расстояние x объем погруженной части возрастает на Sx (рис.3), и возникает возвращающая сила, равная изменению силы Архимеда:

$$F_x = -\Delta F_{\text{Арх}} = -\rho g \Delta V_{\text{погр}} = -\rho g S x,$$

где ρ – плотность воды, откуда

$$k_{\text{эф}} = \rho g S, \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m}} = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}.$$

Энергетический подход в этой задаче более сложен, поскольку как при вычислении потенциальной энергии надо учитывать как потенциальную энергию тела, так и потенциальную энергию вытесненной воды.

Задача 3. В земном шаре прорезан воображаемый прямолинейный туннель, соединяющий два города (рис.4). Если обеспечить полное отсутствие трения при движении капсулы вдоль этого туннеля, то за какое время она, двигаясь только за счет силы тяготения, пролетит от одного города до другого? Землю считать однородным шаром.

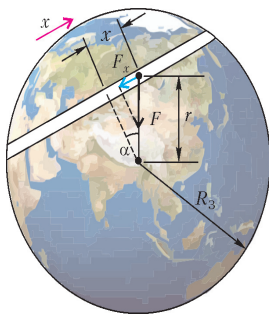


Рис 4

действующая со стороны любого слоя с радиусом больше r , строго равна нулю. (Доказательство этого утверждения можно найти во многих учебниках.) Следовательно, наша капсула притягивается к шару радиусом r и массой

$$M_r = M \frac{r^3}{R_3^3}$$

(масса пропорциональна объему). Сила притяжения равна

$$F = G \frac{m M_r}{r^2} = G \frac{m M}{R_3^2} \frac{r}{R_3} = mg \frac{r}{R_3},$$

а возвращающая сила равна

$$F_x = -F \sin \alpha = -mg \frac{r}{R_3} \frac{x}{r} = -mg \frac{x}{R_3}.$$

Поскольку возвращающая сила пропорциональна x , тело будет совершать гармонические колебания. Время движения от одного города до другого равно половине периода этих колебаний:

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{эф}}}} = \pi \sqrt{\frac{R_3}{g}} \approx 42 \text{ мин.}$$

Интересно, что время не зависит от длины туннеля.

Энергетический подход в этой задаче хотя и возможен принципиально, но приводит к громоздким вычислениям.

Следующие несколько задач позволяют использовать только динамический подход, так как рассматриваемые в них системы не являются консервативными.

Задача 4. На два цилиндра, вращающихся навстречу друг другу, положили массивную доску (рис.5). Найдите период малых колебаний доски в продольном направлении, если

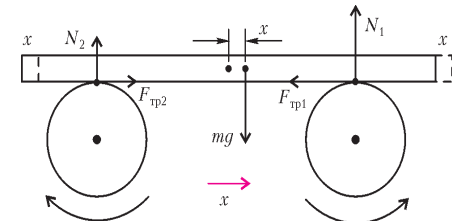


Рис 5

коэффициент трения между доской и цилиндрами μ , а расстояние между осями цилиндров l .

Решение. Когда центр доски находится посередине между осями цилиндров, силы реакции цилиндров равны: $N_1 = N_2$, откуда следует равенство сил трения: $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2}$, т.е. доска находится в равновесии. При смещении доски на расстояние x вправо силы N_1 и $F_{\text{тр}1}$ увеличиваются, а силы N_2 и $F_{\text{тр}2}$ уменьшаются, и возникает возвращающая сила $F_x = F_{\text{тр}2} - F_{\text{тр}1}$. Запишем правило моментов относительно центра доски (доска не вращается):

$$N_1 \frac{l}{2} - N_2 \frac{l}{2} - mgx = 0,$$

откуда находим

$$F_x = \mu N_2 - \mu N_1 = -\frac{2\mu mg}{l} x.$$

Окончательно получаем

$$k_{\text{эф}} = \frac{2\mu mg}{l}, \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{эф}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2\mu g}}.$$

Задача 5. В теплоизолированном вертикальном цилиндре под поршнем находится одноатомный идеальный газ (рис.6). Найдите частоту малых колебаний поршня. Расстояние от поршня до дна цилиндра l . Над поршнем газа нет.

Решение. При смещении поршня на малое расстояние x объем газа изменяется на $\Delta V = Sx$, в результате давление изменяется на Δp и возникает возвращающая сила

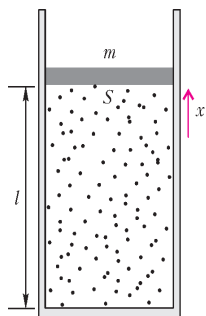


Рис. 6

$F_x = \Delta p S$. Чтобы найти Δp , запишем первый закон термодинамики:

$$0 = \Delta U + p \Delta V.$$

Поскольку внутренняя энергия одноатомного идеального газа равна $U = \frac{3}{2} pV$, то $\Delta U = \frac{3}{2} p \Delta V + \frac{3}{2} V \Delta p$. Получаем

$$0 = \frac{3}{2} V \Delta p + \frac{5}{2} p \Delta V,$$

откуда находим изменение давления:

$$\Delta p = -\frac{5}{3} p \frac{\Delta V}{V} = -\frac{5}{3} p \frac{x}{l}$$

и возвращающую силу:

$$F_x = \Delta p S = -\frac{5}{3} \frac{pS}{l} x = -\frac{5}{3} \frac{mg}{l} x$$

(из условия равновесия поршня $pS = mg$). Отсюда получаем

$$k_{\text{эф}} = \frac{5}{3} \frac{mg}{l}, \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m}} = \sqrt{\frac{5g}{3l}}.$$

Замечание. Если решать задачу в предположении постоянства температуры T (стенки хорошо проводят тепло, колебания достаточно медленные), то из уравнения состояния и условия $\Delta T = 0$ запишем

$$p \Delta V + V \Delta p = 0,$$

откуда для эффективной жесткости и частоты колебаний получим

$$k_{\text{эф}} = \frac{mg}{l}, \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эф}}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

В следующей задаче рассматриваются колебания под действием кулоновских сил.

Задача 6 (ЕГЭ 2009). По гладкой горизонтальной направляющей длиной $2l$ скользит бусинка массой m с положительным зарядом Q . На концах направляющей находятся одинаковые положительные заряды q (рис. 7). Бусинка совер-

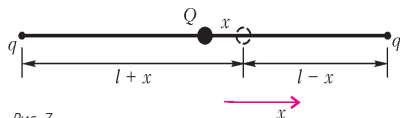


Рис. 7

шает малые колебания около положения равновесия с периодом T . Чему будет равен период колебаний бусинки, если: а) ее заряд увеличить в два раза; б) длину l увеличить в два раза?

Решение. Возвращающая сила, возникающая при смещении бусинки вдоль направляющей, равна равнодействующей двух кулоновских сил:

$$F_x = k \frac{qQ}{(l+x)^2} - k \frac{qQ}{(l-x)^2} = -k \frac{4qQlx}{(l^2 - x^2)^2} \approx -\frac{4kqQ}{l^3} x.$$

Получаем

$$k_{\text{эф}} = \frac{4kqQ}{l^3}, \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{эф}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^3}{4kqQ}}.$$

При увеличении заряда Q в два раза период колебаний уменьшится в $\sqrt{2}$ раз, а при увеличении длины l в два раза – увеличится в $2\sqrt{2}$ раз.

Отметим, что ответ на первый вопрос очевиден и без расчетов. Действительно, при увеличении Q в два раза все кулоновские силы (при заданном x) возрастут в два раза, следовательно, возвращающая сила возрастет в два раза, а значит, и $k_{\text{эф}}$ возрастет тоже в два раза.

Энергетический подход здесь возможен, но оказывается более громоздким, чем динамический. Начнем с того, что не все школьники знакомы с потенциальной энергией кулоновского взаимодействия (формулы для $E_{\text{п}}$ нет в учебниках базового уровня и она не входит в программу ЕГЭ). Кроме того, необходимо учесть потенциальную энергию в точке равновесия (от этого положения в энергетическом подходе отсчитывается потенциальная энергия). Получаем

$$E_{\text{п}} = k \frac{qQ}{l+x} + k \frac{qQ}{l-x} - 2k \frac{qQ}{l} = k \frac{2qQl}{l^2 - x^2} - 2k \frac{qQ}{l} = k \frac{2qQl(l^2 + x^2)}{l^4 - x^4} - 2k \frac{qQ}{l} \approx \frac{4kqQ}{l^3} \frac{x^2}{2}.$$

В следующей задаче изучаемое движение ничем не похоже на колебательное, но получить ответ удастся именно с помощью теории колебаний.

Задача 7. Стержень длиной l , скользящий по гладкой горизонтальной поверхности вдоль своей длины, наезжает на шероховатый участок и останавливается, заехав на него часть своей длины. Какое время длилось торможение, если коэффициент трения между стержнем и шероховатым участком равен μ ?

Решение. В тот момент, когда на шероховатый участок заехала часть стержня длиной x (рис. 8) и массой $m_1 = m(x/l)$, сила трения действует только на эту часть стержня:

$$F_{\text{тр}} = \mu m_1 g = \frac{\mu mg}{l} x.$$

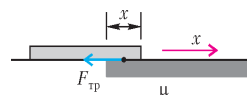


Рис. 8

Видно, что уравнение движения стержня

$$m \ddot{x} = -\frac{\mu mg}{l} x$$

совпадает с уравнением гармонических колебаний (1). Значит, движение стержня до остановки происходит по закону $x = A \sin \omega t$ (движение от центральной точки), где $\omega = \sqrt{\mu g/l}$, и время до остановки равно одной четверти периода воображаемых колебаний:

$$t = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Если в последней задаче энергетический подход не применим в принципе, то в следующей задаче, во многом на нее похожей, энергетический подход оказывается более удобным.

Задача 8. Тонкую цепочку длиной l удерживают за верхний конец на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Через какое время после освобождения цепочки она полностью покинет наклонную плоскость, если вначале ее нижний конец находился у края наклонной плоскости? Трением пренебречь.

Решение. Запишем механическую энергию через координату x верхнего конца цепочки (рис.9):

$$E_k = \frac{mx^2}{2},$$

$$E_n = m_1 g \frac{x}{2} \sin \alpha = \left(m \frac{x}{l} \right) g \frac{x}{2} \sin \alpha = \frac{mg \sin \alpha}{l} \frac{x^2}{2}.$$

Видно, что энергия имеет такой же вид, как в уравнении (2). Следовательно, движение происходит по закону $x = l \cos \omega t$,

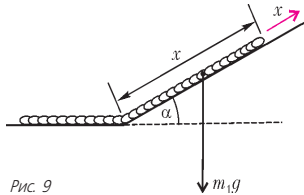


Рис. 9

где $\omega = \sqrt{(g \sin \alpha)/l}$ (движение от крайней точки к центру), и время до точки $x = 0$ занимает четверть периода:

$$t = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}}.$$

Можно ли решить эту задачу динамическим способом? Видимая трудность заключается в том, что разные части цепочки движутся с одинаковыми по модулю, но по-разному направленными ускорениями. Однако можно преодолеть эту трудность, применив метод, который часто используется в задачах с протяженными гибкими телами. Условно этот метод можно назвать «суммированием вдоль линии тела». Разобьем цепочку на маленькие кусочки и запишем второй закон Ньютона для каждого кусочка в проекциях на направление его движения (вдоль поверхности):

$$\Delta m a_x = (F_1)_x - (F_2)_x + (\Delta m g)_x,$$

куда вошли силы взаимодействия с соседними кусочками. Силы нормальной реакции поверхности ни в одно уравнение не входят. При суммировании всех уравнений силы взаимодействия между кусочками сократятся (по третьему закону Ньютона), и мы получим уравнение колебаний

$$m x'' = -m_1 g \sin \alpha,$$

где $m_1 = mx/l$ – масса части цепочки, находящейся на наклонной плоскости.

Замечание. Применение этого метода позволит нам, например, решить задачу, которая, являясь модификацией предыдущей, может быть рассмотрена только в рамках динамического подхода. Если к условию предыдущей задачи добавить трение о наклонную плоскость (оставив горизонтальную поверхность гладкой), то закон сохранения энергии применять нельзя (точнее, можно, но совсем иначе – с учетом работы силы трения), а метод суммирования вдоль цепочки дает уравнение колебаний

$$m x'' = - \left(m \frac{x}{l} \right) g \sin \alpha + \mu \left(m \frac{x}{l} \right) g \cos \alpha,$$

откуда находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}, \text{ и } t = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Рассмотрим теперь несколько задач, которые хорошо решаются энергетическим методом, но, как мы увидим, могут быть решены и в рамках динамического подхода.

Задача 9. Невесомый стержень длиной $2l$ согнули посередине под углом 2α , прикрепили к его концам одинаковые грузы и повесили местом сгиба на тонкий гвоздь, вбитый в стену (рис.10). Пренебрегая трением, найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия.

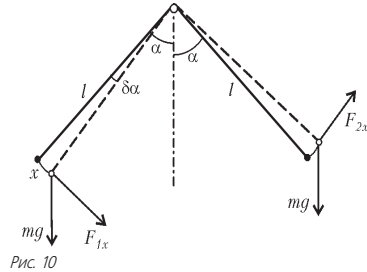


Рис. 10

Решение. Вообще говоря, рассматриваемая система представляет собой один из примеров так называемого *физического маятника*, т.е. твердого тела, которое может вращаться относительно горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс. Такие задачи решаются стандартно и легко в рамках динамики твердого тела. В школьных задачниках обычно рассматриваются модельные физические маятники, состоящие из нескольких точечных масс, скрепленных невесомыми стержнями. К такой конструкции можно применить энергетический метод, поскольку легко выразить как кинетическую, так и потенциальную энергию. Обозначив за x малое смещение каждого груза, а за $\delta\alpha = x/l$ – малый угол отклонения стержней, получим

$$E_k = 2m \frac{x^2}{2}, E_n = 2mg (l \cos \alpha) \frac{(\delta\alpha)^2}{2} = \frac{2mg \cos \alpha}{l} \frac{x^2}{2}.$$

При расчете E_n мы нашли высоту подъема центра масс, который располагается под точкой подвеса на расстоянии $l \cos \alpha$ от нее. Для циклической частоты колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{l}}.$$

На первый взгляд, обычный динамический подход здесь не применим. В самом деле, как учесть силу реакции стержней, которые в точке подвеса взаимодействуют с гвоздем? Однако на помощь приходит невесомость конструкции, из которой следует следующее утверждение (правило моментов для жесткой невесомой конструкции): сумма моментов внешних сил равна нулю, даже если невесомая конструкция движется. Введем силы F_{1x} и F_{2x} (см. рис.10), действующие на грузы со стороны стержней (точнее, перпендикулярные стержням составляющие). Так как на стержни со стороны грузов действуют такие же силы, то из правила моментов $F_{1x}l + F_{2x}l = 0$ следует, что $F_{1x} + F_{2x} = 0$. Уравнения движения для грузов имеют вид

$$m x'' = F_{1x} + mg \sin(\alpha - \delta\alpha)$$

и

$$m x'' = F_{2x} - mg \sin(\alpha + \delta\alpha).$$

Сложив эти уравнения, получим

$$2m x'' = -2mg \cos \alpha \sin \delta\alpha, \text{ или } x'' = -\frac{g \cos \alpha}{l} x.$$

Задача 10. Невесомый стержень длиной $2l$ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К свободному концу стержня и к его середине прикрепили одинаковые грузы. Найдите частоту

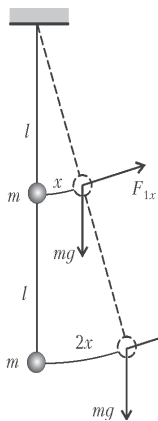


Рис. 11

малых колебаний такой системы около положения равновесия.

Решение. Решим задачу сначала энергетическим методом. Обозначим за x смещение верхнего груза (рис.11), тогда смещение нижнего груза равно $2x$ и скорости грузов равны x' и $2x'$. Кинетическая энергия системы равна

$$E_k = m \frac{x'^2}{2} + m \frac{(2x')^2}{2} = 5m \frac{x'^2}{2},$$

а потенциальная энергия равна

$$E_n = \frac{mgx^2}{l} + \frac{mg(2x)^2}{2l} = \frac{3mgx^2}{l}.$$

Получаем $m_{эф} = 5m$, $k_{эф} = \frac{3mg}{l}$, и

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{3g}{5l}}.$$

Решим теперь эту же задачу динамическим методом. Если силы, действующие на грузы в перпендикулярном стержню направлении, равны F_{1x} и F_{2x} (см. рис.11), то из уравнения моментов для невесомого стержня получим

$$F_{1x}l + F_{2x} \cdot 2l = 0, \text{ т.е. } F_{1x} + 2F_{2x} = 0.$$

Запишем уравнения движения грузов:

$$m\ddot{x} = F_{1x} - mg \frac{x}{l}$$

и

$$m(2\ddot{x}) = F_{2x} - mg \frac{2x}{2l},$$

умножим второе уравнение на 2 и сложим их. Получим

$$5m\ddot{x} = -\frac{3mg}{l}x, \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{3g}{5l}}.$$

Задача 11. Стержень длиной l изогнули по дуге окружности в виде полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. Найдите циклическую частоту малых колебаний полукольца.

Решение. Эта задача красиво решается энергетическим методом (рис.12). Обозначим за x смещение полукольца из

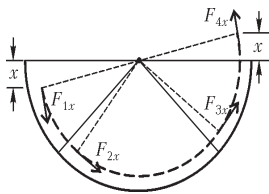


Рис. 12

положения равновесия. Кинетическая энергия полукольца равна

$$E_k = m \frac{x'^2}{2},$$

а изменение потенциальной энергии удастся рассчитать

благодаря свойствам симметрии дуги окружности. Действительно, при повороте дуги на малый угол все изменение в распределении масс сводится к перемещению кусочка длиной x и массой $\Delta m = m(x/l)$ с одного конца дуги на другой. Изменение потенциальной энергии при этом будет равно

$$E_n = \Delta mgx = \frac{2mgx^2}{l}.$$

Получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg/l}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Для решения задачи в рамках динамического подхода применим метод суммирования уравнений движения вдоль линии полукольца, разобранный в задаче 8. При этом сумма всех сил взаимодействия с невесомыми спицами (в проекции на линию дуги) равна нулю, поскольку равен нулю суммарный момент этих сил относительно оси вращения:

$$F_{1x}R + F_{2x}R + \dots = 0$$

(см. задачу 9). При суммировании проекций сил тяжести вклады участков, симметричных относительно нижней точки, сокращаются и остается только сила тяжести кусочка длиной $2x$ и массой $m(2x/l)$. Получаем уравнение движения

$$m\ddot{x} = -m \frac{2x}{l}g = -\frac{2mg}{l}x,$$

которое дает такой же ответ для частоты колебаний, как и при энергетическом подходе.

Упражнения

1. В U-образную трубку сечением S налили жидкость объемом V . Найдите циклическую частоту малых колебаний жидкости около положения равновесия. Трением пренебречь.

2. Тело массой m плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$). Найдите период малых вертикальных колебаний тела, если площадь сечения тела на уровне границы раздела жидкостей равна S .

3. Невесомый стержень длиной $2l$ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню. К концам стержня прикрепили грузы массами m и $2m$. Найдите частоту малых колебаний системы около положения равновесия.

4. Тонкий стержень длиной l движется вдоль своей длины по гладкой горизонтальной плоскости и наезжает на большой шероховатый участок. Через какое время стержень остановится, если к тому моменту, когда он целиком въехал на этот участок, его скорость уменьшилась вдвое? Коэффициент трения между стержнем и шероховатой поверхностью равен μ .

Указание. Первый отрезок времени t_1 и скорость v_0 найдите из уравнений $\frac{v_0}{2} = v_0 \cos \omega t$, $l = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$, где $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$ (см. задачу 7 статьи).

XXXII Турнир городов

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1 (3)¹. См. задачу M2229 «Задачника «Кванта».

2 (4). Прямоугольник разбили на 121 прямоугольную клетку десятью вертикальными и десятью горизонтальными прямыми. У 111 клеток периметры целые. Докажите, что и у остальных девяти клеток периметры целые.

А. Шаповалов

3 (5). Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее, чем за час?

М. Хачатурян

4 (5). Дан выпуклый четырехугольник. Если провести в нем любую диагональ, он разделится на два равнобедренных треугольника. А если провести в нем обе диагонали сразу, он разделится на четыре равнобедренных треугольника. Обязательно ли этот четырехугольник – квадрат?

В. Шевяков

5. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем:

- а) (2) на 50-й день;
б) (3) на 25-й день?

А. Шаповалов, жюри

10–11 классы

1 (3). См. задачу M2230 «Задачника «Кванта».

2 (4). См. задачу 3 базового варианта для 8–9 классов.

3 (4). По кругу лежат 100 белых камней. Дано целое число k в пределах от 1 до 50. За ход разрешается выбрать любые k подряд идущих камней, первый и последний из которых белые, и покрасить первый и последний камни в черный цвет. При каких k можно за несколько таких ходов покрасить все 100 камней в черный цвет?

А. Бердников

4 (5). Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.

Фольклор

5 (5). См. задачу M2232 «Задачника «Кванта».

¹ Здесь и далее в скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.

Сложный вариант

8–9 классы

1 (4). Можно ли какой-нибудь шестиугольник разбить одной прямой на четыре равных треугольника?

Н. Стрелкова

2 (4). Через начало координат проведены прямые (включая оси координат), которые делят координатную плоскость на углы в 1° . Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 100 - x$.

А. Шаповалов

3 (5). У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь – различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь – четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные – на другую так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой?

А. Толыго

4 (6). Докажите, что для любого натурального числа N найдутся такие две пары натуральных чисел, что суммы в парах одинаковы, а произведения отличаются ровно в N раз.

Б. Френкин

5 (7). См. задачу M2233 «Задачника «Кванта».

6 (10). Два муравья проползли каждый по своему замкнутому маршруту на доске 7×7 . Каждый муравей полз только по сторонам клеток доски и побывал в каждой из 64 вершин клеток ровно один раз. Каково наименьшее возможное число таких сторон, по которым проползали и первый, и второй муравьи?

А. Заславский

7 (10). Дана квадратная таблица, в каждой клетке которой записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a , а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b . Докажите, что $a = b$.

Р. Банат

10–11 классы

1 (4). См. задачу 3 сложного варианта для 8–9 классов.

2 (6). См. задачу M2234 «Задачника «Кванта».

3. От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.

а) (3) Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?

б) (4) Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой – равносторонним треугольником со стороной 2?

П. Сергеев (6), А. Шаповалов (а)

4. Даны N синих и N красных палочек, причем сумма длин синих палочек равна сумме длин красных. Известно, что из синих палочек можно сложить N -угольник и из красных – тоже. Всегда ли можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю – в красный цвет, а красную – в синий) так, что снова из синих палочек можно

будет сложить N -угольник и из красных – тоже? Решите задачу:

- а) (4) для $N = 3$;
 б) (4) для произвольного натурального N , большего 3.

А. Грибалко

5 (8). Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2 , касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β . Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD , расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α . Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

Ф. Ивлев

- 6 (8). См. задачу 7 сложного варианта для 8–9 классов.
 7 (11). См. задачу M2235 «Задачника «Кванта»».

Устный тур для 11 класса

1. В ряд выложены n монет. Два игрока по очереди выбирают монету и переворачивают ее. Расположение орлов и решек не должно повторяться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

Б. Френкин

2. На доске написаны 49 натуральных чисел. Все их попарные суммы различны. Докажите, что наибольшее из чисел больше 600.

Б. Френкин

3. Даны три попарно пересекающихся луча. В некий момент времени по каждому лучу из его начала начинает двигаться точка с постоянной скоростью. Известно, что эти три точки в любой момент времени образуют треугольник, причем центр описанной окружности этого треугольника тоже движется равномерно и прямолинейно. Верно ли, что все эти треугольники подобны друг другу?

Ф. Нилов

4. Подмножество студенческой группы назовем *идеальной компанией*, если:

- 1) в этом подмножестве все девушки нравятся всем юношам;
- 2) в это подмножество нельзя никого добавить, не нарушив условие 1.

В некой группе учатся 9 студенток и 15 студентов. Староста группы составил список всевозможных идеальных компаний в этой группе. Какое наибольшее число компаний могло оказаться в этом списке?

А. Клячко, Б. Мельников

5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b , что $a^{1000} + 1$ делится на b^{619} и $b^{1000} + 1$ делится на a^{619} .

М. Мурашкин

6. На плоскости расположен центрально-симметричный выпуклый многоугольник площади 1 и две его копии (каждая получена из многоугольника некоторым параллельным переносом). Известно, что никакая точка плоскости не покрыта тремя многоугольниками сразу. Докажите, что общая площадь, покрытая многоугольниками, не меньше 2.

И. Богданов

*Публикацию подготовили
 С. Дориченко, Л. Медников, А. Шаповалов*

Избранные задачи LXXIV Московской математической олимпиады

1. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

- а) ничей не будет;
- б) в ворота «Юга» забьют;
- в) «Север» выиграет;
- г) «Север» не проиграет;
- д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счетом закончился матч? (6)¹

Л.Федулкин, Е.Федулкина

2. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись? (6)

А.Шаповалов

¹ В скобках после текста каждой задачи указан класс, в котором она предлагалась

3. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (рис.1). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8. (7)

А.Хачатурян

4. Числа от 1 до 16 расставлены в таблице 4×4 . В каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали (включая диагонали из одной клетки) отметили самое большое из стоящих в ней чисел. (Одно число может быть отмечено несколько раз.) Могли ли оказаться отмечены:

- а) все числа, кроме, быть может, двух;
- б) все числа, кроме, быть может, одного;
- в) все числа? (7)

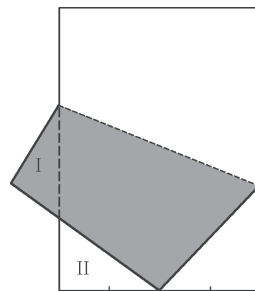


Рис. 1

А.Шаповалов

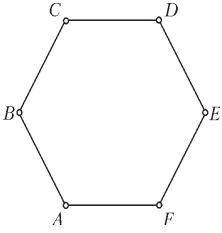


Рис. 2

5. В вершинах шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 2) лежали 6 одинаковых на вид шариков: в A – массой 1 г, в B – 2 г, ..., в F – 6 г. Шутник поменял местами два шарика в противоположных вершинах. Имеются двухчашечные весы, позволяющие узнать, в какой из чаш масса шариков больше. Как за одно взвешивание определить, какие именно шарики переставлены? (8)

А.Шаповалов

6. Каждое звено несамопересекающейся ломаной состоит из нечетного числа сторон клеток квадрата 100×100 , соседние звенья перпендикулярны. Может ли ломаная пройти через все вершины клеток? (8)

А.Шаповалов

7. Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC , и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD , пересекаются в точке P . Докажите, что $PA = PD$. (8)

М.Волчкевич

8. Что больше:

$$2011^{2011} + 2009^{2009} \text{ или } 2011^{2009} + 2009^{2011}?$$

Р.Федоров

9. В турнире каждый участник встретился с каждым один раз. Каждую встречу судил один арбитр, и все арбитры судили разное количество встреч. Игрок Иванов утверждает, что все его встречи судили разные арбитры. То же самое утверждают о себе игроки Петров и Сидоров. Может ли быть, что никто из них не ошибается? (9)

Б.Френкин

10. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен 30° . Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC , D – точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны. (9)

Ю.Блинков

11. На доске написаны три натуральных числа, не превосходящих 40. За один ход можно увеличить любое из написанных чисел на число процентов, равное одному из двух оставшихся чисел, если в результате получится целое число. Существуют ли такие исходные числа, что за несколько ходов одно из чисел на доске можно сделать больше 2011? (9)

Т.Голенищева-Кутузова, В.Клетцын

12. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лучи AB и DC пересекаются в точке K . Точки P и Q – центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD . Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$. (9)

А.Акопян

13. На доске выписано $(n-1)n$ выражений: $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, ..., $x_1 - x_n$, $x_2 - x_1$, $x_2 - x_3$, ..., $x_2 - x_n$, ..., $x_n - x_{n-1}$, где $n \geq 3$. Леша записал в тетрадь все эти выражения, их суммы по два различных, по три различных и так далее вплоть до суммы всех выражений. При этом Леша во всех выписываемых суммах приводил подобные слагаемые

(например, вместо $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)$ Леша запишет $x_1 - x_3$, а вместо $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_1)$ он запишет 0). Сколько выражений Леша записал в тетрадь ровно по одному разу? (9)

А.Лебедев

14. Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее, в свою очередь, меньше, чем количество чисел, делящихся на 10? (10)

Т.Караева, Б.Френкин

15. Доска 2010×2011 покрыта доминошками 2×1 ; некоторые из них лежат горизонтально, некоторые – вертикально. Докажите, что граница горизонтальных доминошек с вертикальными имеет четную длину. (10)

Б.Френкин

16. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1 . Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC . Найдите угол C треугольника. (10)

А.Заславский

17. У Винтика и у Шпунтика есть по три палочки суммарной длины 1 метр у каждого. И Винтик, и Шпунтик могут сложить из трех своих палочек треугольник. Ночью в их дом прокрался Незнайка, взял по одной палочке у Винтика и у Шпунтика и поменял их местами. Наутро оказалось, что Винтик не может сложить из своих палочек треугольник. Можно ли гарантировать, что Шпунтик из своих – сможет? (10)

А.Грибалко

18. Куб разбит на прямоугольные параллелепипеды так, что для любых двух параллелепипедов их проекции на некоторую грань куба перекрываются (т.е. пересекаются по фигуре ненулевой площади). Докажите, что для любых трех параллелепипедов найдется такая грань куба, что проекции каждых двух из них на эту грань не перекрываются. (10)

В.Гурвич, А.Гольберг

19. Последовательность из двух различных чисел продолжи двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпал четвертый член геометрической прогрессии? (11)

О.Косухин

20. Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов $x^{2011} + 2011x - 1$ и $x^{2011} - 2011x + 1$. (11)

О.Косухин

21. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D , а на боковой стороне AB – точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC . Докажите, что $AD + DE > AB + BE$. (11)

П.Бородин

22. Рассматриваются ортогональные проекции данного правильного тетраэдра с единичным ребром на всевозможные плоскости. Какое наибольшее значение может принимать радиус круга, содержащегося в такой проекции? (11)

О.Косухин

23. Продавец хочет разрезать кусок сыра на части, которые можно будет разложить на две кучки равного веса. Он умеет разрезать любой кусок сыра в одном и том же отношении $a : (1-a)$ по весу, где $0 < a < 1$. Верно ли, что на любом

промежутке длины 0,001 из интервала $(0; 1)$ найдется значение a , при котором он сможет добиться желаемого результата с помощью конечного числа разрезов? (11)

А.Шаповалов

24. Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат, и если да, то каковы ее начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)? (11)

Фольклор, А.Канунников, И.Сергеев

25. Верно ли, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нем не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321? (11)

П.Бородин

26. Внутри треугольника ABC взята такая точка O , что $\angle ABO = \angle CAO$, $\angle BAO = \angle BCO$, $\angle BOC = 90^\circ$.

Найдите отношение $AC : OC$. (11)

И.Сергеев

27. При какой перестановке $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ чисел $1, 2, \dots, 2011$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\dots^{a_{2010}^{a_{2011}}}}}}$$

будет наибольшим? (11)

О.Косухин

28. По ребрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук все время остается только в одной грани (в каждой грани – свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определенном направлении, причем так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков. (11)

Фольклор

Публикацию подготовили С.Дориченко, Е.Епифанов

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. Красная Шапочка испекла 20 пирогов, сложила их в корзинку и отправилась через лес к больной бабушке. Когда до бабушки ей оставалось пройти 3 км, из кустов выскочил голодный волк с явным намерением съесть хоть что-нибудь. Увидев его, Красная Шапочка бросила на землю один пирог и побежала со скоростью 2,5 м/с. Волк съел пирог за 1 мин и побежал за Красной Шапочкой со скоростью 5 м/с. Тогда Красная Шапочка стала бросать пироги, как только волк начинал ее догонять, и так добежала до бабушкиного дома. Сколько пирогов досталось бабушке?

М.Семенов

2. Наблюдая за кокосом, свободно падающим с вершины пальмы, турист обнаружил, что пройденное кокосом расстояние s зависит от времени падения t как $s = \frac{gt^2}{2}$, где $g = 10 \text{ м/с}^2$. Турист также определил, что средняя скорость кокоса за время падения составляет $v_{\text{ср}} = 5 \text{ м/с}$. Определите высоту пальмы.

М.Ромашка

3. Братья Коля и Саша ехали на автобусе из пункта A в пункт B . Дорога состояла из двух частей, на каждой из которых автобус ехал с постоянной скоростью. На первой части скорость автобуса была v_1 , а на второй – v_2 . Средняя скорость автобуса на всем пути оказалась равной $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$.

Коля и Саша поспорили о том, как соотносятся длины этих частей пути и времена их прохождения. Коля считает, что автобус половину пути ехал со скоростью v_1 , а другую половину пути – со скоростью v_2 . Саша считает, что автобус половину времени ехал со скоростью v_1 , а другую половину

времени – со скоростью v_2 . Можно ли из условия задачи определить, прав ли кто-нибудь из братьев, и если да, то кто именно?

М.Ромашка

4. В Интернете сейчас можно найти видеозаписи различных физических опытов, в частности такого: группа студентов напускает в большое корыто до краев какой-то тяжелый газ из баллона, а потом кладет на поверхность этого газа модель корабля, согнутую из алюминиевой фольги, и этот корабль плавает! Потом студенты зачерпывают ковшиком газ из корыта, переливают его внутрь корабля, и он тонет. Найдите, какой минимальной плотностью должен обладать этот тяжелый газ, чтобы в нем мог плавать корабль в форме прямоугольного параллелепипеда (с открытым верхом), согнутый из бытовой алюминиевой фольги толщиной 25 мкм. Размеры корабля: длина – 50 см, ширина – 20 см, высота бортов – 10 см. Считайте, что лишние куски, образовавшиеся при сгибании параллелепипеда из листа фольги, удалены. Плотность алюминия $2,7 \text{ г/см}^3$, плотность воздуха $1,3 \text{ кг/м}^3$.

М.Семенов

8 класс

1. Спортсмен начал забег по прямой и первые 10 м бежал со скоростью 10 м/с, следующие 10 м – со скоростью 9 м/с, следующие 10 м – со скоростью 8 м/с и так далее. Сколько времени длился забег до остановки? С какой средней скоростью спортсмен пробежал первую половину дистанции?

С.Варламов

2. Металлическая плоская линейка имеет малую и всюду одинаковую толщину, одинаковую по всей длине ширину и длину 50 см. На концах линейки находятся отметки: 0 см и

50 см. Линейку согнули под прямым углом. Место сгиба приходится на отметку 40 см. За какое место нужно подвесить на тонкой нити согнутую линейку, т.е. вблизи какой отметки нужно закрепить нить, чтобы длинный прямой участок линейки в положении равновесия был горизонтальным?

С.Варламов

3. Однажды зимой рыболов пробурил лунку во льду на поверхности озера и обнаружил, что вода в лунке находится на глубине $h = 18$ см, если отсчитывать от поверхности льда на озере. Расстояние от лунки до ближайшей точки берега озера во много раз больше, чем толщина слоя льда и радиус лунки. Вычислите толщину слоя льда, считая ее одинаковой на всей поверхности озера. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$. Массой снега, рыболова и всех других объектов на поверхности озера пренебречь.

М.Ромашка

4. В Москве построили 30 снегоплавильных пунктов, в которых собранный с улиц снег расплавляется и в жидком виде отправляется на очистку. Для плавления снега используется теплая вода из канализации, причем сейчас реализуется только 1% от сбрасываемого в канализацию количества теплоты. Оцените, сколько процентов от сбрасываемой в канализацию тепловой воды надо израсходовать, чтобы перетопить весь выпадающий на улицы и площади снег. Известно, что на одного москвича в среднем приходится 10 м^2 площади улиц, тротуаров и площадей. Каждый житель сливает в канализацию в среднем 100 л воды в сутки, при этом средняя температура воды на входе в сливное отверстие равна $+30 \text{ }^\circ\text{C}$. Средняя месячная норма осадков зимой для Москвы составляет 50 мм (в пересчете на воду). Удельная теплота плавления снега, как и льда, равна $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, плотность воды 1000 кг/м^3 , удельная теплоемкость воды $4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$.

С.Варламов

9 класс

1. Находясь на краю глубокого обрыва, турист бросает камень вертикально вверх. При последующем движении вниз камень проходит точку бросания и падает в обрыв. Известно, что за промежуток времени $t = 1$ с, отсчитываемый от момента броска, камень прошел путь $s = 2,9$ м. Определите начальную скорость камня, сообщенную ему при броске. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

М.Ромашка

2. В цилиндрическом сосуде высотой $h = 20$ см находится смесь воды и мелких кусочков льда. На поверхности плавает круглая стальная крышка толщиной $d = 2$ мм, нижний край которой находится точно на поверхности воды. Найдите среднюю плотность смеси воды и льда. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$, плотность стали $\rho_{\text{с}} = 7800 \text{ кг/м}^3$. Трением льда о стенки сосуда пренебречь.

М.Ромашка

3. Схема, состоящая из трех резисторов и трех клемм, соединенных по схеме «треугольник» (рис.1), исследуется следующим образом: две клеммы замыкаются между собой и измеряется сопротивление между двумя замкнутыми клеммами и третьей (свободной). В результате измерений получились сопротивления R_a , R_b , R_c . Найдите номиналы

резисторов R_1 , R_2 , R_3 , из которых состоит схема.

Д.Харабадзе

10 класс

1. На гладкой горизонтальной поверхности находится жесткий клин массой M , причем его гладкая наклонная поверхность составляет с горизонтом угол α . На этот клин налетает жесткий шарик массой m , у которого за мгновение до столкновения с наклонной поверхностью клина скорость была направлена горизонтально. Происходит абсолютно упругий удар. При каком отношении масс m/M шарик после удара будет двигаться в вертикальном направлении?

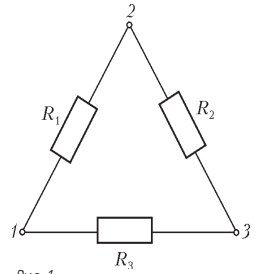


Рис. 1

С.Варламов

2. Школьник Коля налил в тарелку холодную окрошку, имеющую температуру $t_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$. Масса окрошки $m = 300$ г, а ее удельная теплоемкость равна удельной теплоемкости воды $c_0 = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$. Коля добавил в окрошку горячую картошку, которая имела температуру $t_k = 80 \text{ }^\circ\text{C}$. Полная теплоемкость добавленной картошки равна $C = 450 \text{ Дж/}^\circ\text{C}$. После установления теплового равновесия температура картошки и окрошки оказалась равной $t = 22 \text{ }^\circ\text{C}$. В какую сторону было передано больше тепла при теплообмене с окружающей средой: от содержимого тарелки в среду или наоборот и на сколько больше?

М.Ромашка

3. Из трех одинаковых батареек собрали цепь, схема которой изображена на рисунке 2. Что покажет вольтметр, подключенный к выводам 1 и 2? ЭДС каждой из батареек равна \mathcal{E} .

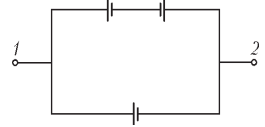


Рис. 2

О.Шведов

11 класс

1. Поезд, подходящий к станции, движется равнозамедленно с ускорением $a = 0,2 \text{ м/с}^2$ вплоть до момента остановки. На абсолютно гладком горизонтальном столе внутри вагона поезда находится грузик, соединенный пружиной с неподвижной опорой (рис.3). Пока поезд движется, грузик неподвижен относительно вагона. В момент, когда поезд останавливается, грузик приходит в движение и начинает колебаться с периодом $T = 1$ с. Найдите амплитуду колебаний грузика.

М.Ромашка

2. С одним молем одноатомного идеального газа совершают циклический процесс 1–2–3–

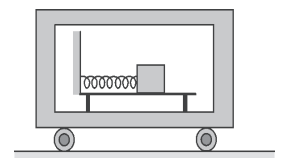


Рис. 3

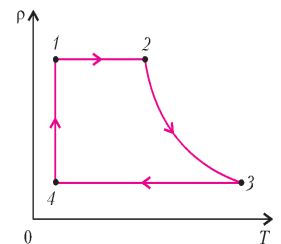


Рис. 4

4-1, как показано на рисунке 4 в координатах p - T (плотность-температура). Участок 2-3 – гиперболоа. Температуры в точках 1, 2 и 3 равны $T_1 = 300$ К, $T_2 = 500$ К и $T_3 = 800$ К соответственно. На участке 4-1 газ отдает холодильнику количество теплоты $Q_{41} = 1172$ Дж. Найдите КПД цикла.

Е. Якута

3. Участок AB электрической цепи состоит из резисторов с сопротивлениями $R_1 = R_0$, $R_2 = 9R_0$, $R_3 = 9R_0$, $R_4 = R_0$,

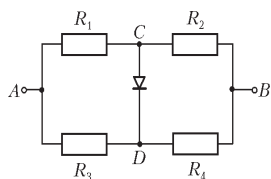


Рис. 5

где $R_0 = 1$ кОм, и идеального диода (рис.5). Идеальный диод пропускает ток без сопротивления в направлении от C к D и совсем не пропускает ток в обратном направлении. Участок AB подключают к источнику переменного синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin \omega t$, амплитуда которого $U_m = 300$ В. Какая тепловая мощность будет выделяться на этом участке?

М.Ромашка

4. Бусинка, нанизанная на неподвижный стержень, образующий угол α с горизонтом, имеет массу m и заряд q (рис.6). Бусинка может скользить вдоль стержня с коэффициентом трения μ и начинает движение из состояния покоя, причем $\mu < \tan \alpha$. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , линии которой горизонтальны (перпендикулярны плоскости рисунка и направлены за его плоскость). Какую максимальную скорость и какое максимальное ускорение будет иметь бусинка при движении? Стержень не проводит ток. Рассмотрите два случая: $q > 0$ и $q < 0$.

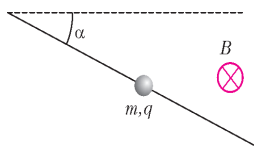


Рис. 6

Рис. 6

М.Ромашка

Второй теоретический тур

8 класс

1. Деревянная палочка AB длиной $l = 1$ м и массой $M = 0,25$ кг подвешена в точке O , которая находится на расстоянии одной трети длины палочки от точки A (рис.7). К правому концу палочки в точке B подвешен медный брусок массой $m_1 = 1$ кг, причем палочка на одну треть своей длины, считая от точки B , погружена в сосуд с водой. К левому концу палочки в точке A подвешен другой груз, массой m_2 . Чему равна масса этого второго груза, если система находится в равновесии? Плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, плотность меди $\rho_m = 8900$ кг/м³, плотность дерева $\rho_d = 400$ кг/м³.

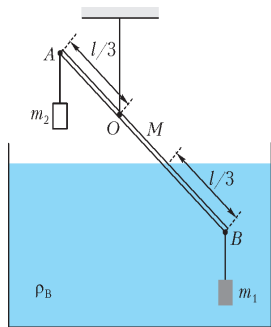


Рис. 7

Е. Якута

2. В сосуд, где находилось $V = 4$ л воды при температуре $t = 20$ °С, опускают сильно нагретую стальную деталь массой $m = 2,4$ кг. При этом часть воды быстро испаряется, так что температура оставшейся воды практически не успевает измениться. После установления теплового равновесия температура воды в сосуде оказывается равной $t_p = 25$ °С. Найдите начальную температуру стальной детали. Удельная теплоемкость воды $c_v = 4200$ Дж/(кг·°С), удельная теплоемкость стали $c_c = 460$ Дж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды $r = 2,2 \cdot 10^6$ Дж/кг, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³. Всеми потерями тепла из сосуда, кроме испарения, пренебречь.

М.Ромашка

3. Зимой на входе в систему отопления школьного здания вода имеет температуру $t_1 = +60$ °С, а на выходе из этой системы вода имеет температуру $t_2 = +40$ °С. Тепловые потери здания школы вследствие теплопроводности стен, излучения и сквозняков составляют $N = 10^6$ Вт. Трубы, подводящие и отводящие воду, имеют внутренний диаметр $D = 100$ мм. С какой средней по сечению труб скоростью течет в них вода? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°С), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³.

С.Варламов

9 класс

1. Самолет TU-160 в безветренную на всей территории земли погоду стартовал с аэродрома в Санкт-Петербурге. В течение всего времени 27-часового полета самолет находился на одной и той же высоте и держал одну и ту же по величине скорость 1000 км/ч, сделав несколько дозаправок в воздухе. Сначала он 6 ч летел на юг, затем 10 ч на восток, потом 6 ч на север, а в последние 5 ч полета его скорость была направлена на запад. Сколько еще времени потребуется самолету, чтобы с такой же по величине скоростью долететь до родного аэродрома по кратчайшему пути? Санкт-Петербург находится на широте 60°, а радиус Земли равен примерно 6400 км.

С.Варламов

2. После завершения строительства пирамиды Хеопса все ее ребра, согласно легенде, имели одну и ту же длину $A \approx 230$ м. В основании пирамиды был квадрат со стороной A . По преданиям, во время Великого потопа уровень воды совпал с вершиной пирамиды. С какой силой давила вода на северную боковую грань пирамиды? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Замечание: объем пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}SH$, где S – площадь основания пирамиды, H – ее высота.

С.Варламов

3. Цилиндрический калориметр радиусом $R = 10$ см и высотой $h = 30$ см на одну треть своего объема заполнен льдом при температуре $t_0 = -10$ °С. В калориметр через отверстие сверху медленно наливают воду, имеющую температуру $t = 30$ °С. Какой максимальный объем воды можно налить в калориметр? Удельная теплоемкость воды $c_v = 4200$ Дж/(кг·°С), удельная теплоемкость льда $c_d = 2100$ Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, плотность льда $\rho_d = 900$ кг/м³. Теплоемкостью калориметра и потерями тепла пренебречь.

М.Ромашка

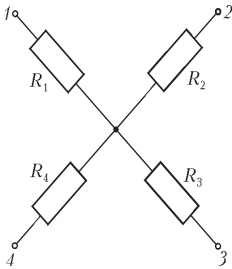


Рис. 8

4. Схема состоит из четырех клемм и четырех различных резисторов, которые имеют один общий вывод, а другим выводом соединены с соответствующей клеммой (рис. 8). Известны сопротивления между клеммами 1-2, 2-3 и 3-4, они равны R_{12} , R_{23} и R_{34} соответственно. Сопротивление между какими клеммами еще необходимо измерить, чтобы найти номиналы всех резисторов R_1 , R_2 , R_3 и R_4 ? Чему они будут равны?

Д.Харабадзе

10 класс

1. На горизонтальном столе находятся два одинаковых грузика, связанные невесомой и нерастяжимой нитью, образующей равнобедренный треугольник AOB (рис. 9). Углы при основаниях треугольника равны α . В точке O к этой нити привязана другая нить, которую удерживают вертикально слегка натянутой. С каким минимальным ускорением нужно начать поднимать точку O , чтобы грузы оторвались от стола в момент начала своего движения?

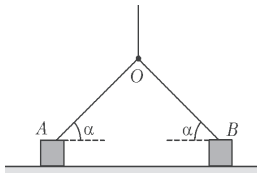


Рис. 9

2. В системе, изображенной на рисунке 10, все блоки невесомые и вращаются без трения, все нити невесомые и нерастяжимые (их жесткость велика по сравнению с жесткостью пружины), пружина также невесома. Система находится в покое. При какой массе груза M груз 1 сразу после пережигания нити в точке A будет иметь ускорение больше чем g ?

М.Ромашка

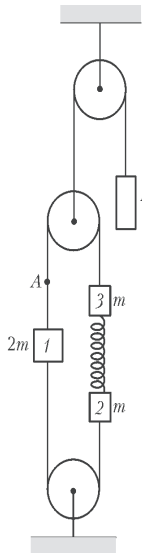


Рис. 10

3. С одним молеом одноатомного идеального газа совершают циклический процесс 1-2-3-4-1, как показано на рисунке 11 в координатах $p-V$ (давление-объем). Известно, что температуры газа в точках 1 и 3 равны $T_1 = 300$ К и $T_3 = 1500$ К соответственно, а отношение объемов газа в точках 1 и 2 равно $V_2/V_1 = 2$. Чему равна работа, совершаемая газом за цикл?

Е.Якута

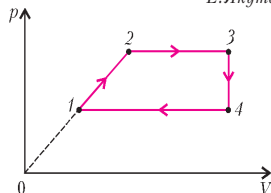


Рис. 11

4. В N -полюснике (схема с N клеммами) каждая клемма соединена с каждой другой при помощи резистора сопротивлением R – схема типа «многоугольник». Известно, что эта схема эквивалентна схеме типа «звезда» с N клеммами, в которой N резисторов номиналом r имеют в центре общий контакт, а другим контактом соединены с соответствующей клеммой (каждый резистор соединен с одной клеммой). Как связаны друг с другом величины R и r ?

Д.Харабадзе

11 класс

1. Рабочим телом тепловой машины служит некоторое количество воды. Цикл, по которому работает машина, показан на рисунке 12 в $p-T$ координатах, где синей пунктирной линией изображена зависимость давления насыщенных паров воды от температуры. Цикл состоит из изобарического (1-2-3), изохорического (3-4) и изотермического (4-1) участков. Найдите КПД этого цикла, считая воду практически несжимаемой жидкостью.

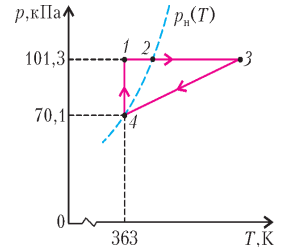


Рис. 12

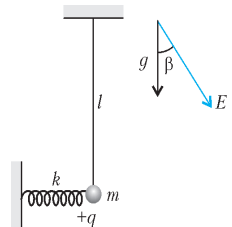
Напоминания: $p_1 = 101,3$ кПа – нормальное атмосферное давление, удельная теплота парообразования воды (при 100°C) $L = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, молярная масса воды $M = 18$ г/моль, удельная теплоемкость воды $c = 4,19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К), теплоемкость одного моля водяного пара при постоянном давлении равна $4R$.

Е.Выродов

2. Тонкий жесткий непроводящий стержень длиной L несет на себе электрический заряд Q , который равномерно распределен по длине стержня. Маленький шарик имеет электрический заряд q и прикреплен к одному из концов стержня тонкой непроводящей и незаряженной нитью длиной R . Какова сила натяжения нити, если система находится в равновесии? Считать, что $Q/q > 0$. Силу тяжести не учитывать.

С.Варламов

3. На тонкой непроводящей нити длиной l подвешен маленький шарик массой m , который заряжен зарядом $+q$. Слева к шарiku прикреплен непроводящая пружинка жесткостью k , расположенная горизонтально. Шарик находится в однородном электрическом поле \vec{E} , направленном так, как показано на рисунке 13. В состоянии равновесия нить с шариком висит вертикально. Найдите период малых колебаний шарика в плоскости рисунка.



Е.Якута Рис. 13

Публикацию подготовили М.Семенов, О.Шведов, А.Якута

Биссектриса и сумма синусов

В 1982 году в «Задачнике «Кванта» была опубликована задача М734 (Р.Мазов).

Рассмотрим точку K пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с описанной окружностью и опустим перпендикуляр KH на прямую AC (рис.1). В задаче М734 требовалось доказать, что *длина проекции отрезка AK на прямую AC равна полусумме длин сторон AB и AC .*

Рассмотрим сначала тригонометрическое решение. Обозначив $\angle ACK = \alpha$ и $\angle BCK = \beta$, по теореме синусов имеем

$$AB = 2R \sin(\alpha - \beta), \quad AK = 2R \sin \alpha$$

и

$$AC = 2R \sin(180^\circ - \angle ACK - \angle CAK) = 2R \sin(\alpha + \beta),$$

где R – радиус описанной окружности треугольника ABC . Длина проекции AH отрезка AK на прямую AC равна $AK \cos \beta = 2R \sin \alpha \cos \beta$. Таким образом, формула

$$\frac{AB + AC}{2} = AH \text{ записывается в виде}$$

$$R \sin(\alpha - \beta) + R \sin(\alpha + \beta) = 2R \sin \alpha \cos \beta.$$

Сокращая на R , приходим к известной тригонометрической формуле суммы синусов.

Теперь – красивое геометрическое решение. В силу теоремы о вписанном угле, K – середина дуги BC . Отразив симметрично точку B относительно прямой AK , получаем на луче AC точку D , для которой $AD = AB$ и $BK = DK = CK$. Высота KH равнобедренного треугольника DKC является его медианой:

$$AH = (AD + AC)/2 = (AB + AC)/2,$$

что и требовалось доказать. Так вот какова она, формула суммы синусов!

Упражнение. Центр I вписанной окружности треугольника ABC и центр J той его внеописанной окружности, которая касается стороны BC и прямых AB и AC , лежат на окружности с центром K и радиусом BK (рис.2). Докажите это.

Указание. В силу теоремы о внешнем угле треугольника AIB имеем $\angle BIK = \angle IAB + \angle IBA$. Поскольку

$$\angle IAB = \angle BCK = \angle KBC \text{ и } \angle IBA = \angle IBC,$$

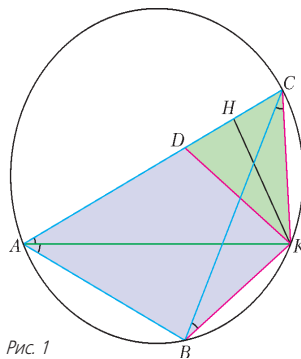


Рис. 1

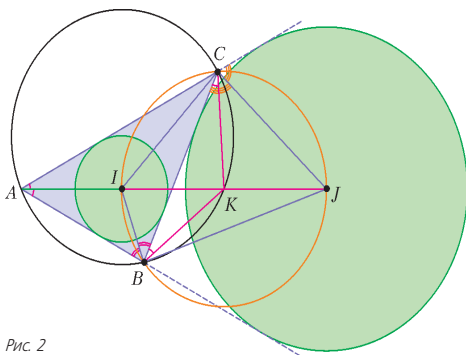


Рис. 2

то

$$\angle BIK = \angle KBC + \angle IBC = \angle IBK,$$

откуда $KB = KI$. Равенство $KC = KJ$ можно доказать аналогично (применив теорему о внешнем угле к треугольнику AJ) или же заметив, что угол ICJ прямой.

А.Спивак

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. Второго сорта. От косточки толку нет, поэтому выгоднее покупать сливы, у которых мякоть дешевле. В килограмме слив первого сорта мякоти будет $\frac{2}{3}$ килограмма, поэтому 1 кг мякоти стоит $150 \cdot \frac{3}{2} = 225$ рублей. Мякоть второго сорта стоит $100 \cdot 2 = 200$ рублей за 1кг, поэтому выгоднее покупать сливы второго сорта.

2. Аляша или Боря. Наш четырехугольник не может быть прямоугольником, так как тогда неправы двое – Аляша и Вася. Значит, в четырехугольнике есть тупой угол (если бы все углы были острыми, то сумма была бы меньше чем $90^\circ \cdot 4 = 360^\circ$). Тогда при одном из разрезов получается тупоугольный треугольник, т.е. Вася заведомо прав. На рисунке 1 приведены примеры, когда неправ только Аляша и когда неправ только Боря.

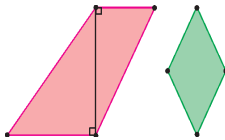


Рис. 1

3. На рисунке 2 приведен один из возможных заборов. Есть много других вариантов.

4. Пусть в верхней половине маленьких часов всего на x минут песка. Чтобы отмерить 8 минут, можно действовать так:
1) Перевернуть большие часы.
2) Через x минут перевернуть и те, и другие часы.
3) Еще через x минут перевернуть большие часы.
4) Через $2 - x$ минут снова перевернуть большие часы и подождать еще $2 - x$ минут

Всего от начала прошло 4 минуты, а песок в обоих часах вес в нижней половине. Оставшись 4 минуты можно отмерить при помощи 2-минутных часов.

5. Пять кубиков. Указание. Посмотрите на змейку спереди (рис.3,а) и сверху (рис.3,б). Для удобства концы змейки покрашены синим и красным цветом. Они находятся на соседних по высоте уровнях, а в проекции на горизонтальную плоскость между ними расстояние 4 клетки. Поэтому всего потребуется не менее 5 кубиков, чтобы замкнуть змейку. Убедитесь, что пяти кубиков хватает.

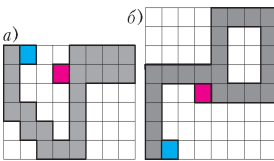


Рис. 3

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. 13 букетов. Всего у продавца 65 цветов, поэтому больше 13 букетов он при всем желании не продаст. Пример для 13 букетов приведен в таблице.

17. Примерно 150000. Рассмотрим промежуток в 1500 дней. За это время волосы на голове сменяются (почти все волосы, которые росли до начала промежутка, выпадут). В каждый из дней появится примерно по 100 новых волос, и почти все

они доживут до конца срока. Значит, в конце их будет примерно 150000.

18. $N = 4$. Если ладей больше 4, то свободными от них будут не более трех горизонталей и трех вертикалей, т.е. клеток, свободных от боя ладей, не более 9. Поэтому на доске уже не могут расположиться 5 слонов и 5 коней. Пример расположения 4 ладей, 4 слонов и 4 коней приведен на рисунке 4.

19. К сожалению, в условии была допущена опечатка: на разных чашах должны лежать гири с разностью масс 40 г, а не 10 г. Назовем гири в 1 г, ..., 40 г легкими, а гири в 41 г, ..., 80 г – тяжелыми. Если легкая гиря x лежит на одной чаше, то тяжелая гиря $40 + x$ – на другой.

Тогда, если мысленно уменьшить массу каждой тяжелой гири на 40 г, на каждой чаше окажутся гири с массами от 1 до 40 г. Значит, прибавки по 40 г должны распределяться поровну, т.е. на чашах должно быть поровну тяжелых гирек (и поровну легких).

С другой стороны, если легкая гиря x лежит на первой чаше, то тяжелая гиря $81 - x$ – на другой, откуда легкая гиря $41 - x$ лежит тоже на первой чаше. Значит, легкие гири на первой чаше делятся на 10 пар с суммой 41, аналогично – на второй чаше. Значит, равновесие не изменится, если убрать с весов тяжелые гири.

20. В три раза. Мысленно растянем (или сожмем) правое крыло бабочки так, чтобы отрезок AB стал равным 4. При этом правое крыло бабочки станет равным синему треугольнику левого крыла (рис.5). Соотношение цветов в правом крыле от этого не изменилось, зато расчеты теперь можно провести устно.

Если площадь синего треугольника левого крыла равна S , то площадь всего левого крыла тоже равна S , а всего левого крыла – $4S$. Синий треугольник правого крыла, подобен всему левому крылу. Его основание AB ровно в четыре раза меньше основания левого крыла, поэтому его площадь в 16 раз меньше и равна $4S/16 = S/4$. Тогда красный цвет в правом крыле занимает площадь $3S/4$. Значит, красного цвета в правом крыле в три раза больше, чем синего!

Гвоздики			Число букетов
Красные	Розовые	Белые	
1	1	3	8
1	2	2	1
1	3	1	2
2	2	1	2

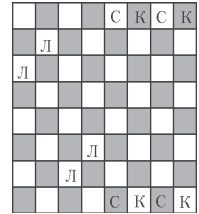


Рис. 4

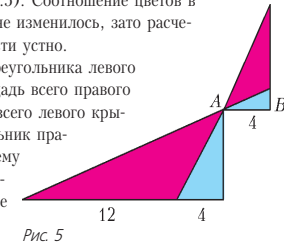


Рис. 5

ПРИЯТНОГО АППЕТИТА!

Первый вопрос. Если у первого было m хлебов, а у второго – больше чем $2m$ хлебов, то при дележе всего хлеба поровну на троих primero, очевидно, достанется свыше $(m + 2m)/3 = m$ хлебов, т.е. больше, чем у него имеется с собой. Поэтому второй, по сути дела, накормит не только третьего, но частично и первого. И тогда отрицательное число $2(m - n)$ фактически означает сумму, которую первый должен сам уплатить второму за дополнительное угощение (другой вопрос, согласится ли он это сделать).

Второй вопрос. Все использованные нами соотношения между числами Фибоначчи применимы только для $k \geq 3$, ибо

для $k < 3$ просто не существует u_{k-2} . Поэтому значения $k = 1$ и $k = 2$ надо проверять отдельно. В результате такой проверки и выявляется дополнительная пара (1,1).

Третий вопрос. Как ни странно, задача решается практически «на пальцах». Последовательность Фибоначчи, очевидно, возрастающая, т.е. $u_{k-2} < u_{k-1} < u_k$. Поэтому $u_k = u_{k-1} + u_{k-2} > u_{k-2} + u_{k-2} = 2u_{k-2}$. Поэтому если даже взять два числа Фибоначчи, стоящих не рядом, а через одно, то большее более чем вдвое превзойдет меньшее. Если же два не соседних числа Фибоначчи находятся еще дальше друг от друга, то указанное превосходство будет еще сильнее. Но тогда (см. ответ на первый вопрос) владельцу меньшего числа хлеба не может достаться одна монета – более того, он сам должен будет приплатить своему попутчику. Поэтому можно уверенно заявить: не соседних чисел Фибоначчи, удовлетворяющих указанному условию, не существует.

ОХОТА НА ПРИЗРАК ЛЕОНАРДО

1. Вершины, куда необходимо сделать ход, на графах обозначены черным цветом.

а) Граф для цилиндрической доски 8×8 см. на рисунке 6.

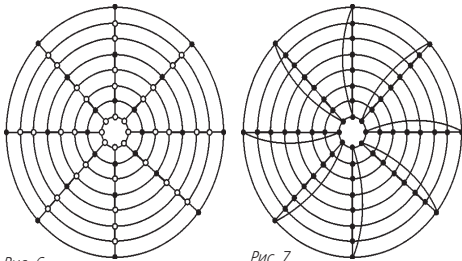


Рис. 6

Рис. 7

б) Граф для тороидальной доски 8×8 приведен на рисунке 7. Поскольку из любой вершины графа тороидальной доски $n \times n$ для $n \geq 3$ выходит ровно 4 ребра, то одной из подходящих раскрасок будет раскраска с ходом в каждую вершину.

в) Граф для листа Мебиуса, склеенного из доски 8×8 , приведен на рисунке 8.

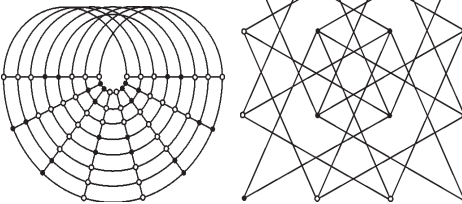


Рис. 8

Рис. 9

2. **Указание.** В случае доски 3×3 граф представляет собой 8-реберный цикл и изолированную точку. В случае доски 4×4 граф приведен на рисунке 9.

3. См. рисунок 10.

4. Одно из возможных решений показано на рисунке 11. В каждой ячейке записано количество ходов в эту ячейку.



Рис. 10

5. **Указание.** С учетом того, что решение существует, проведите аналогичные рассуждения и получите соотношение

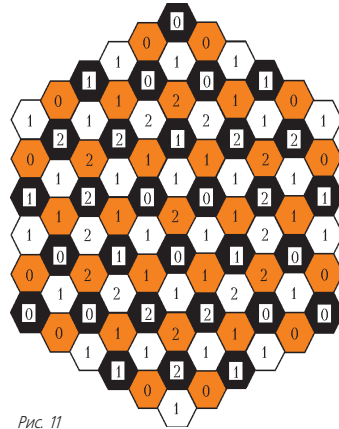


Рис. 11

$ks = 2^n$, где n – число вершин графа, k – число классов, в каждом из которых по s элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ: ДИНАМИЧЕСКИЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

$$1. \omega = \sqrt{\frac{2gS}{V}} \quad 2. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{(\rho_1 - \rho_2)gS}}$$

$$3. \omega = \sqrt{\frac{g}{3l}} \quad 4. t = \frac{\pi + \sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{l}{\mu g}}$$

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ LXXIV МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

1. 1:2.

2. Пронумеруем цвета числами от 1 до 7. Пусть, если гном не видит два цвета одной четности, то он называет цвет с большим номером, а если цвета, которые он не видит, имеют разную четность, то он называет меньший номер. Какой бы цвет ни имел спрятанный колпак, его назовут ровно три гнома. (Например, если спрятан колпак цвета 3, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов 1, 4 и 6.)

2. 12.

Отметим равные отрезки (рис. 12 – здесь мы пользовались тем, что в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны). Видим, что длина большей стороны равна $a + b + 4$, а длина меньшей стороны равна $a + b$. Значит, $a + b = 8$, и большая сторона имеет длину $a + b + 4 = 8 + 4 = 12$.

4. а) Да; б) да; в) нет.

Заметим, что числа в углах будут отмечены в любом случае – это числа, стоящие на диагоналях длины 1. Рассмотрим наименьшее из чисел, не стоящих в углах. Оно не отмечено, так как на каждой линии вместе с ним есть и другие «неугловые» числа.

На рисунке 13 приведен пример таблицы, в которой будут отмечены все числа, кроме одного.

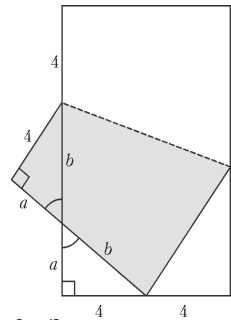


Рис. 12

4	10	9	3
11	16	15	8
12	13	14	7
1	5	6	2

Рис. 13

5. *Указание.* На одну чашу весов нужно положить шарики из вершин A и E , а на другую – из вершин B и D .

6. Нет, не может.

Указание. Предположим, что такая ломаная существует. Докажите, что одна из сторон квадрата обладает таким свойством: каждый из узлов этой стороны принадлежит некоторому (причем ровно одному) звену ломаной, идущему вдоль стороны квадрата. Общее число узлов на стороне должно быть четным. Однако оно равно 101.

7. Обозначим через Q середину стороны AD (рис.14). Заметим, что MQ параллельно BD , а QN параллельно AC , так как эти средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно. Поэтому отрезки MP и NP будут высотами в треугольнике MNQ , а точка P – его ортоцентр. Значит, QP перпендикулярна MN . Поскольку MN параллельна AD , получаем, что PQ перпендикулярна

Рис. 14

AD , а значит, является серединным перпендикуляром. Следовательно, $PA = PD$.

8. $2011^{2011} + 2009^{2009} > 2011^{2009} + 2009^{2011}$.

9. Нет.

Указание. Пусть никто из трех игроков не ошибся. Обозначим количество игроков через n . Упорядочим арбитров по количеству встреч, которые они судили. Докажите, что тогда

всего арбитров $n-1$, причем первый арбитр судил ровно 1 встречу, второй – ровно 2, ..., $(n-1)$ -й – ровно $n-1$. Далее получите противоречие, рассмотрев арбитра, который судил ровно одну встречу.

10. *Указание.* Пусть E – точка касания вписанной окружности и стороны BC (рис.15). Тогда треугольник CEI равнобедренный прямоугольный, $CE = IE$.

В прямоугольном треугольнике IEB угол IBE равен 30° , значит, $\angle EIB = 60^\circ$, откуда треугольник IDE равносторонний.

Тогда треугольник CDE равнобедренный. Угол при вершине E

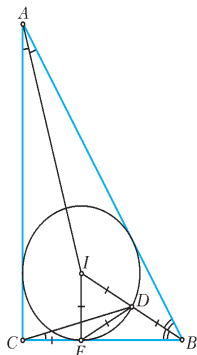


Рис. 15

равен

$$\angle CED = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - (90^\circ - \angle IED) = 150^\circ.$$

Следовательно, $\angle DCE = 15^\circ$.

Осталось заметить, что

$$\angle IAC + \angle ACD = 15^\circ + (90^\circ - \angle DCE) = 90^\circ,$$

а значит, прямые AI и CD перпендикулярны.

11. Да, существуют.

12. В первую очередь заметим, что $\angle ADB = \angle DBC$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD (рис.16). С другой стороны, $\angle APB = 2\angle ADB$, поскольку в окружности, описанной около треугольника ABD , угол ADB вписанный, а угол APB центральный. Аналогично получим, что $\angle DQC = 2\angle DBC$, а значит,

$$\angle APB = 2\angle ADB = 2\angle DBC = \angle DQC.$$

Далее, поскольку $AP = PB$ и $DQ = QC$, треугольники APB и DQC подобны по двум сторонам и углу между ними. Поэто-

му $\angle KAP = \angle K DQ$ и $AP : DQ = AB : DC$. Вместе с тем, из теоремы о пропорциональных отрезках $AK : DK = AB : DC$, поэтому треугольники APK и DQK подобны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда немедленно следует, что $\angle PKA = \angle QKD$.

13. $n!$.

Все разности, выписанные на доске, разбиваются на пары противоположных: $x_1 - x_2$ с $x_2 - x_1$ и т.д. Если некоторая сумма не содержит ни разности $x_i - x_j$, ни разности $x_j - x_i$, то к этой сумме можно прибавить $(x_i - x_j) + (x_j - x_i)$ и получить сумму, равную исходной. Далее, если некоторая сумма содержит и слагаемое $x_i - x_j$ и слагаемое $x_j - x_i$, то можно их вычеркнуть и опять получить сумму, равную исходной. Итак, в каждой сумме, записанной в тетрадь ровно один раз, из каждой пары противоположных разностей встречается ровно одна.

Рис. 16

Рассмотрим одну из сумм, которые Леша написал в тетрадь ровно один раз. Построим по ней ориентированный граф, вершинами которого являются переменные x_1, \dots, x_n и из вершины x_i ведет ребро в вершину x_j тогда и только тогда, когда в рассматриваемую сумму входит разность $x_i - x_j$. В предыдущем абзаце мы показали, что между любыми двумя вершинами проведено ровно одно из двух возможных ребер (или $x_i \rightarrow x_j$, или $x_j \rightarrow x_i$, но не оба).

Заметим теперь, что построенный нами ориентированный граф не может содержать циклов, т.е. таких последовательностей вершин $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, что из каждой вершины ведет ребро в следующую вершину, а из последней вершины – в первую. Действительно, иначе из суммы можно было бы вычеркнуть

$$(x_{i_1} - x_{i_2}) + (x_{i_2} - x_{i_3}) + \dots + (x_{i_{k-1}} - x_{i_k}) + (x_{i_k} - x_{i_1})$$

и получить сумму, равную исходной.

Поскольку в графе нет циклов, найдется вершина, из которой не выходит ни одно ребро (иначе можно было бы выйти из произвольной вершины и, переходя каждый раз по какому-нибудь ребру, не более чем через n шагов прийти в вершину, в которой мы уже были). В графе без этой вершины опять найдется вершина, из которой не выходит ни одно ребро, и т.д. Пусть первая из построенных в предыдущем абзаце вершин – x_{i_1} , вторая – x_{i_2} , ..., последняя – x_{i_k} . Тогда сумма равна

$$(x_{i_1} - x_{i_2}) + (x_{i_2} - x_{i_3}) + \dots + (x_{i_{k-1}} - x_{i_k}) + (x_{i_k} - x_{i_1}) = (n-1)x_{i_1} + (n-3)x_{i_2} + \dots + (3-n)x_{i_{k-1}} + (1-n)x_{i_k}.$$

Осталось показать, что любая сумма такого вида встретится в тетради ровно один раз. Рассмотрим набор чисел, в котором $x_{i_1} > x_{i_2} > \dots > x_{i_k}$. Для такого набора в рассматриваемую сумму вошли все положительные слагаемые и ни одного отрицательного слагаемого. Следовательно, для такого набора чисел все остальные суммы будут строго меньше. Значит, никакое другое записанное Лешей выражение не может быть тождественно равно этой сумме.

Ясно, что количество таких сумм равно количеству перестановок n элементов, т.е. равно $n!$.

14. Да. Подойдет, например, такая арифметическая прогрессия:

$$10, 50, 90, 130, 170, 210, 250, 290, \dots$$

15. Указание. Будем считать вертикальными доминошками те, которые лежат параллельно длинной стороне доски. Рассмотрим всю границу области, занятой вертикальными доминошками. Она состоит из замкнутых ломаных, проходящих по границам клеток. Ясно, что каждая из этих ломаных имеет четную длину.

Указанная граница складывается из границы вертикальных доминошек с горизонтальными и из той части границы доски, к которой примыкают вертикальные доминошки. Осталось доказать, что на границах доски вертикальные доминошки занимают четное количество клеток.

16. 120° .

Продолжив луч BC до пересечения с описанной окружностью треугольника BB_1C_1 , получим точку K (рис.17). Вписанные углы C_1BB_1 и KBB_1 равны (так как BB_1 – биссектриса), значит, $B_1C_1 = B_1K$. При этом точки K и C_1 лежат на окружности (описанной вокруг треугольника BB_1C_1), центр которой принадлежит прямой AC . Следовательно, K и C_1 симметричны друг другу относительно прямой AC .

Получаем равенство трех углов $\angle BCC_1 = \angle C_1CB_1 = \angle B_1CK$. Их сумма равна 180° , значит каждый из них равен 60° , и $\angle ACB = \angle BCC_1 + \angle C_1CB_1 = 120^\circ$.

Замечание. Легко показать, что центр O окружности может лежать только на продолжении отрезка AC за точку C и, значит, прямая BC пересекает окружность именно так, как показано на рисунке.

17. Да, можно.

Обозначим через $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ длины палочек, которые наутро оказались у Винтика, а через $y_1 \geq y_2 \geq y_3$ – длины палочек, которые оказались у Шпунтика. Винтик не может сложить из своих палочек треугольник, значит, $x_1 \geq x_2 + x_3$. Предположим, что и Шпунтик не может сложить треугольника:

$y_1 \geq y_2 + y_3$. Тогда $x_1 + y_1 \geq x_2 + x_3 + y_2 + y_3$. Поскольку сумма длин всех шести палочек равна 2 м, получаем, что $x_1 + y_1 \geq 1$ м. Значит, длина какой-то из этих двух палочек не меньше 50 см. Но тогда она не может быть стороной треугольника с периметром 1 м, что противоречит условию.

18. Введем систему координат с началом в вершине куба и осями, параллельными его ребрам. Вместо проекций на грани будем рассматривать проекции на координатные плоскости (назовем их нижней, передней и левой).

Заметим, что грани всех параллелепипедов должны быть параллельны координатным плоскостям. Заметим также, что два параллелепипеда могут перекрываться в проекции не более чем на одну плоскость: если они перекрываются хотя бы на двух, то перекрываются проекции на все три оси, а тогда перекрываются и сами параллелепипеды.

Предположим, что найдутся три параллелепипеда A, B и C , нарушающие требование задачи. Тогда для каждой из трех пар найдется своя плоскость, проекции на которую будут перекрываться. Пусть a – расстояние между параллелепипедами B и C вдоль оси, перпендикулярной соответствующей плоскости, аналогично, b – расстояние между A и C , c – расстояние между A и B . Среди всех трех троек, нарушающих требование задачи, возьмем одну из тех, где $a + b + c$ минимально. **Случай 1:** $a + b + c = 0$ (рис.18). Тогда $a = b = c = 0$ и у всех трех параллелепипедов есть общая точка. Из этой точки выходят два противоположных октанта, не покрытых параллелепипедами A, B и C . Значит, они покрыты какими-то другими параллелепипедами D и E . Но эти параллелепипеды дол-

жны целиком лежать в своих октантах, а проекции октантов ни на одну плоскость не перекрываются. Значит, то же верно и для D и E , что противоречит условию.

Случай 2: $a + b + c > 0$ (рис.19). Предположим для определенности, что $a > 0$, B находится левее C , C находится ниже A и A находится дальше B . Рассмотрим все параллелепипеды, лежащие между B и C и перекрывающиеся с ними в проекции на левую плоскость. Среди них обязательно найдется параллелепипед F , у которого верхняя грань не ниже верхней грани C , а дальняя – не ближе дальней грани B . Если F перекрывается с A в проекции на нижнюю плоскость, то рассмотрим тройку (A, B, F) , если на передней – тройку (A, F, C) . В любом случае получим тройку, нарушающую условие задачи, с меньшей суммой $a + b + c$: по одному измерению расстояние не изменилось, по другому не увеличилось, по третьему уменьшилось – это противоречит изначальному выбору тройки.¹

19. С 74-м членом арифметической прогрессии.

20. Пусть $x_1 > 0$ – корень уравнения $x^{2011} + 2011x - 1$, а $x_2 > 0$ – корень уравнения $x^{2011} - 2011x + 1$. Тогда

$x_1^{2011} + 2011x_1 - 1 = 0$ и $x_2^{2011} - 2011x_2 + 1 = 0$. Складывая эти уравнения почленно, получаем

$$(x_1^{2011} + x_2^{2011}) + 2011(x_1 - x_2) = 0.$$

Значит,

$$x_1 - x_2 = -\frac{x_1^{2011} + x_2^{2011}}{2011} < 0.$$

Отсюда получаем $x_1 < x_2$.

21. Пусть $x = AM = ME$, $y = BE$. Так как $DM \parallel AC$ (рис.20), то $\angle MDB = \angle ACB = \angle ABD$ и $DM = MB = x + y$. Обозначим через K середину отрезка DE . Тогда MK – средняя линия в треугольнике ADE и $AD = 2MK$. По неравенству треугольника отсюда получаем

$$AD + DE = 2(DK + KM) > 2MD = 2x + 2y = AB + BE.$$

22. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Пусть A, B, C и D – вершины этого тетраэдра, O – его центр. Спроецируем тетраэдр ортогонально на некоторую плоскость π . Обозначим через A', B', C', D' и O' ортогональные проекции точек A, B, C, D и O на плоскость π соответственно. Если плоскость π параллельна ребрам AB и CD , то проекция представляет собой квадрат с диагональю

$$l = 1. \text{ В этот квадрат можно вписать круг радиуса } \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Предположим, что найдется такая плоскость π , что ортого-

¹ Это решение предложено участником олимпиады Александром Скутинным.

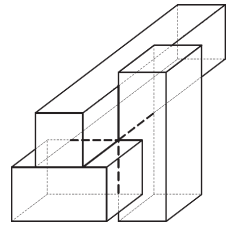


Рис 18

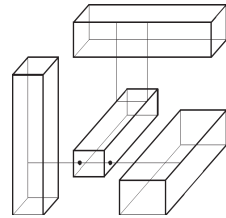


Рис 19

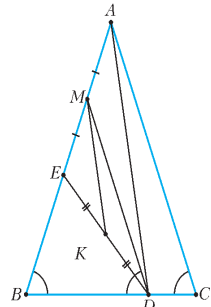


Рис 20

нальная проекция правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром длины 1 на эту плоскость содержит некоторый круг с центром в точке I и радиусом $R > \frac{\sqrt{2}}{4}$. Проекция тетраэдра представляет собой либо четырехугольник с вершинами в точках A', B', C', D' (рис.21), либо треугольник с вершинами в трех из этих точек (рис.22).

Рассмотрим треугольники

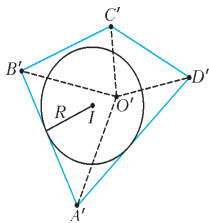


Рис. 21

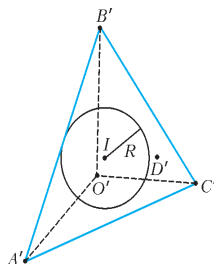


Рис. 22

$O'A'B', O'A'C', O'B'C', O'A'D', O'B'D'$ и $O'C'D'$. По крайней мере один из этих треугольников имеет сторону, являющуюся также стороной в этой проекции, и содержит точку I . Пусть для определенности это треугольник $O'A'B'$. Тогда расстояние от ребра AB до прямой l , проходящей через точку I перпендикулярно к плоскости π , не меньше R и больше $\frac{\sqrt{2}}{4}$. С другой стороны, эта прямая пересекает треугольник OAB в некоторой точке E (рис.23). Расстояние же от точки E до ребра AB не превосходит расстояния от точки O до этого ребра, т.е. не

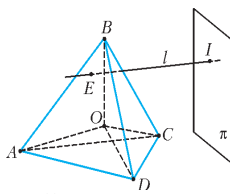


Рис. 23

больше $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Противоречие.

23. Да, верно.

Назовем число a подходящим, если $0 < a < 1$ и для этого значения a продавец сможет добиться желаемого результата. Нетрудно видеть,

что если число a подходящее, то число $1-a$ также является подходящим. Покажем, что для такого a подходящим будет также являться и число \sqrt{a} .

Пусть с помощью конечного числа разрезов в отношении $a : (1-a)$ удалось разделить весь сыр на две кучки равного веса. Покажем, как разрезать какой-либо кусок сыра веса p на части в отношении $a : (1-a)$ по весу, используя при этом лишь разрезы в отношении $\sqrt{a} : (1-\sqrt{a})$. После первого разреза у нас появятся два куска: весом $\sqrt{a}p$ и весом $(1-\sqrt{a})p$. Разрезав первый из кусков в том же отношении, мы в итоге получим три куска: весом ap , весом $\sqrt{a}(1-\sqrt{a})p$ и весом $(1-\sqrt{a})p$. Два последних куска вместе имеют вес $(1-a)p$. Таким образом, каждая операция по разрезанию в отношении $a : (1-a)$ может быть заменена на две операции по разрезанию в отношении $\sqrt{a} : (1-\sqrt{a})$.

Нетрудно видеть, что $a_0 = 1/2$ является подходящим числом.

Следовательно, подходящими являются и числа $a_1 = \sqrt{1/2}$, $a_2 = \sqrt[3]{1/2}$, ..., $a_n = \sqrt[n]{1/2}$, ..., а также числа $b_0 = 1 - a_0$, $b_1 = 1 - a_1$, ..., $b_n = 1 - a_n$, ... Заметим, что $b_{n-1}/b_n = 1 + \sqrt[n]{1/2} < 2$ при всех натуральных n . Положим $b_{n,m} = \sqrt[n]{b_n}$ при всех натуральных m и целых $n \geq 0$. Такие числа также являются подходящими. Поскольку

$$(1,001)^{1024} > 1 + 1024 \cdot 0,001 > 2,$$

то для всех натуральных n имеем

$$\frac{b_{n-1,10}}{b_{n,10}} = 1024 \sqrt[n]{\frac{b_{n-1}}{b_n}} < 1024 \sqrt[2]{2} < 1,001$$

и

$$b_{0,10} = 1024 \sqrt[10]{b_0} = 1024 \sqrt[10]{\frac{1}{2}} > \frac{1}{1,001} > 0,999.$$

Отсюда получаем, что

$$0 < b_{n-1,10} - b_{n,10} = b_{n,10} \left(\frac{b_{n-1,10}}{b_{n,10}} - 1 \right) < 0,001$$

для всех таких n . Так как

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = 1 + \sqrt[n]{\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}$$

при всех натуральных n , то найдется такое натуральное число N , что $b_N < 0,001^{1024}$ и, следовательно, $b_{N,10} < 0,001$.

Итак, числа $b_{n,10}$ при $n = 0, 1, \dots, N$ образуют такой набор подходящих чисел, что $b_{N,10} < b_{N-1,10} < \dots < b_{0,10}$, $b_{N,10} < 0,001$, $b_{0,10} > 0,999$ и $b_{n-1,10} - b_{n,10} < 0,001$ при всех $n = 1, 2, \dots, N$. Легко видеть, что этот набор имеет непустое пересечение с каждым из промежутков длины 0,001 из интервала $(0; 1)$.

24. Да, может. Подходит, например, такая новая система координат, центр которой имеет координаты $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$ в старой системе, а единица измерения на каждой оси новой системы в два раза больше по сравнению со старой.

25. Верно.

Пусть имеется x карточек с цифрой 1, y карточек с цифрой 2 и z карточек с цифрой 3. Тогда $x + y + z = 100$, и так как

$$\frac{x + y - z}{2} + \frac{z + y - x}{2} + \frac{x + z - y}{2} = \frac{x + y + z}{2} = 50,$$

то искомый ряд можно сложить из $\frac{x + y - z}{2} = 50 - z$ фрагментов 21, затем из $\frac{z + y - x}{2} = 50 - x$ фрагментов 32, а затем из $\frac{x + z - y}{2} = 50 - y$ фрагментов 31. При этом карточка с

цифрой 1 встретится ровно $(50 - z) + (50 - y) = 100 - z - y = x$ раз, карточка с цифрой 2 – ровно y раз, а карточка с цифрой 3 – ровно z раз, причем запрещенные фрагменты в предложенном ряде не встретятся, даже если какое-либо из значений x, y или z равно 50.

26. $\sqrt{2}$.

Указание. Докажите, что точка D , симметричная точке C относительно прямой BO , лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABO , и что треугольник DAC подобен треугольнику AOC .

27. $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, ..., $a_{2010} = 2011$, $a_{2011} = 1$.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ – искомая расстановка чисел. Нетрудно видеть, что тогда $a_{2011} = 1$, так как иначе выражение из условия задачи можно было бы увеличить, поменяв между собой местами числа $a_k = 1$ ($k \neq 2011$) и a_{2011} .

Сравним два числа a^b и b^a , где a, b и c – некоторые натуральные числа, причем $a \neq b$, $a \geq 2$ и $b \geq 2$. Так как функция $y = \ln x$ монотонно возрастает при всех $x > 0$, то разность $a^b - b^a$ имеет тот же знак, что и разность

$$b^c \ln a - a^c \ln b = a^c b^c (a^{-c} \ln a - b^{-c} \ln b).$$

Найдем промежутки монотонности функции $y = x^{-c} \ln x$.

Имеем $y' = -cx^{-c-1} \ln x + x^{-c-1} = x^{-c-1}(1 - c \ln x)$. Так как $y' > 0$ при $0 < x < e^{1/c}$ и $y' < 0$ при $x > e^{1/c}$, то функция $y = x^{-c} \ln x$ возрастает на промежутке $0 < x < e^{1/c}$ и убывает на промежутке $x > e^{1/c}$.

При $c = 1$, учитывая неравенство $3 > e$, отсюда получаем

$$3^{-1} \ln 3 > 4^{-1} \ln 4 = 2^{-1} \ln 2 > 5^{-1} \ln 5 > \dots > 2011^{-1} \ln 2011.$$

Значит, $a^{-1} \ln a > b^{-1} \ln b$, если $3 \leq a < b$. Следовательно, $a^{b^c} > b^{a^c}$ при $3 \leq a < b$. При $c \geq 2$ имеем $1 < e^{1/c} < 2$. Поэтому при таких значениях c получаем, что

$$2^{-c} \ln 2 > 3^{-c} \ln 3 > 4^{-c} \ln 4 > \dots > 2011^{-c} \ln 2011.$$

Тогда $a^{-c} \ln a > b^{-c} \ln b$ и $a^{b^c} > b^{a^c}$ при $2 \leq a < b$.

Теперь по индукции можно доказать, что $a_{2011-n} = 2012 - n$ при $n = 1, 2, \dots, 2010$.

28. Эта задача – частный случай задачи M1397 «Задачника «Кванта», ее решение см. в «Кванте» №2 за 1994 год.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

7 класс

1. 10 пирогов. 2. $h = \frac{2v_{\text{сп}}^2}{g} = 5 \text{ м}$.
3. Прав Саша. 4. $\rho_{\text{мин}} = 2,92 \text{ кг/м}^3$.

8 класс

1. $t \approx 29,29 \text{ с}$; $v_{\text{сп1}} \approx 7,74 \text{ м/с}$. 2. На отметке 24 см.
3. $H = h \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} = 1,8 \text{ м}$. 4. 44%.

9 класс

1. $v_0 = g \left(\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{s}{g} - \frac{t^2}{4}} \right)$, т.е. 3 м/с или 7 м/с.

2. $\rho_{\text{сп}} = \rho_{\text{в}} - \rho_{\text{с}} \frac{d}{h} = 922 \text{ кг/м}^3$.

3. $R_1 = \frac{2R_a R_b R_c}{R_a R_b + R_a R_c - R_b R_c}$, $R_2 = \frac{2R_a R_b R_c}{R_a R_b + R_b R_c - R_a R_c}$,

$R_3 = \frac{2R_a R_b R_c}{R_a R_c + R_b R_c - R_a R_b}$.

10 класс

1. $\frac{m}{M} = 1 - \text{ctg}^2 \alpha$.
2. От содержимого тарелки в окружающую среду было передано тепла больше на величину

$$\Delta Q = C(t_{\text{к}} - t) - c_{\text{в}} m(t - t_0) = 10980 \text{ Дж}.$$

3. $U = \frac{2}{3} \mathcal{E}$.

11 класс

1. $x_m = \frac{aT^2}{4\pi^2} \approx 5 \text{ мм}$.

2. $\eta = \frac{2(T_3 - T_2 - T_1 \ln(T_3/T_2))}{5T_3 - 2T_2 - 3T_1} \approx 0,15 = 15\%$ (отметим, что Q_{41} однозначно выражается через заданные температуры).

3. $P = \frac{17U_m^2}{90R_0} = 17 \text{ Вт}$.

4. Если $q > 0$, то $v_m = \frac{mg}{\mu q B} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ и $a_m = g \sin \alpha$;

если $q < 0$, то $v_m = \frac{mg}{\mu q B} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ и

$a_m = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $m_2 = 2m_1 \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \right) - \frac{M}{2} \left(\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} - 1 \right) \approx 1,6 \text{ кг}$.

2. $t_{\text{с}} = 100 + \left(\rho V - m \frac{c_{\text{с}} (100 - t_{\text{п}})}{c_{\text{в}} (t_{\text{п}} - t)} \right) \frac{r + c_{\text{в}} (100 - t)}{c_{\text{с}} m} \approx 231 \text{ }^\circ\text{C}$.

3. $v = \frac{4N}{\pi c p D^2 (t_1 - t_2)} \approx 1,5 \text{ м/с}$.

9 класс

1. Примерно 109,2 с. 2. $F = \frac{\rho g A^3}{2\sqrt{6}} \approx 2,5 \cdot 10^{10} \text{ Н}$.

3. $V_{\text{max}} = \frac{\pi R^2 h \rho_{\text{л}} (2\lambda \rho_{\text{в}} + c_{\text{л}} t_0 (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}))}{3\rho_{\text{в}} (\lambda \rho_{\text{л}} - c_{\text{л}} t (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}))} \approx 6,58 \text{ л}$.

4. Если измерить сопротивление R_{13} , то $R_1 = \frac{R_{12} + R_{13} - R_{23}}{2}$, $R_2 = \frac{R_{13} + R_{23} - R_{12}}{2}$, $R_3 = \frac{R_{12} + R_{23} - R_{13}}{2}$, $R_4 = \frac{2R_{34} - R_{13} + R_{12} - R_{23}}{2}$; если же измерить сопротивление R_{24} , то $R_1 = \frac{2R_{12} + R_{34} - R_{24} - R_{23}}{2}$,

$R_2 = \frac{R_{24} + R_{23} - R_{34}}{2}$, $R_3 = \frac{R_{23} + R_{34} - R_{24}}{2}$,

$R_4 = \frac{R_{24} + R_{34} - R_{23}}{2}$.

10 класс

1. $a_{\text{мин}} = g \text{ ctg}^2 \alpha$. 2. $M > 6m$.

3. $A = \frac{\nu R}{2} (T_3 - 3T_1) = 2493 \text{ Дж}$. 4. $R = Nr$.

11 класс

1. $\eta = 0,029 = 2,9\%$.

2. $F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R(R+L)}$. 3. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{l} + \frac{qE \cos \beta}{ml}}}$.

НАША ОБЛОЖКА

Головоломки из доминошек – новый штурм

(Начало см. на 2-й странице обложки.)

В «Кванте» №5 за 1996 год В.И.Плесов предложил решить эту головоломку для доски 7×7 и начального расположения фишек, изображенного на рисунке 1. Ему было известно решение этого варианта головоломки за 111 ходов. Сейчас известно, что минимальное решение этого варианта содержит 74 хода. Мы предлагаем еще два варианта головоломки для доски 7×7 на рисунках 2 и 3. Минимальное решение для головоломки с рисунка 2 содержит 30 ходов, а минимальное решение для варианта на рисунке 3 – 193 (!) хода. Неизве-

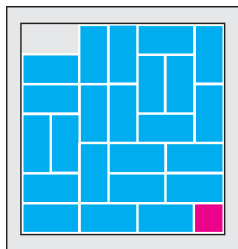


Рис. 1

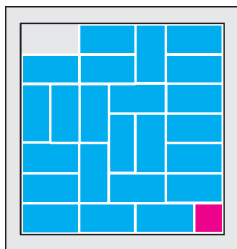


Рис. 2

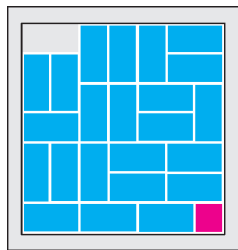


Рис. 3

стно, существуют ли расположения доминошек для доски 7×7 , для которых минимальное решение содержит меньше 30 ходов или содержит больше чем 193 хода.

На доске 5×5 доминошки можно разложить 192 различными способами. Если учесть симметрию относительно диагонали, то имеем 96 различных конфигураций.

Но только в двух из них головоломка имеет решение (рис. 4 и 5). Минимальные решения этих задач состоят из 22 и 24 ходов соответственно. Попробуйте найти их.

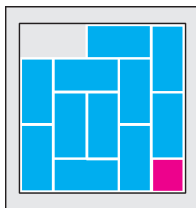


Рис. 4

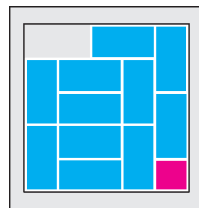


Рис. 5

Можно не ограничиваться квадратной коробочкой, а рассмотреть прямоугольную, например 7×5 . В этом случае из 2415 различных начальных положений доминошек, можно найти лишь 129, при которых головоломка разрешима. Предлагаем читателям найти решение в 128 ходов для расположения на рисунке 6.

Искать минимальные решения подобных головоломок – трудоемкое занятие, и не очень понятно, как доказывать минимальность без перебора всех вариантов. Поэтому естественно использовать специальные программы.

Оценки количества ходов в этой заметке получены с помощью программы SBPSolver (<http://www.culand.ch/dev/SBPSolver.htm>). Она позволяет не только исследовать и находить разные способы решения, но и составлять новые подобные головоломки. Надеемся, что читатели предложат новые интересные варианты головоломки из доминошек.

В.Журавлев

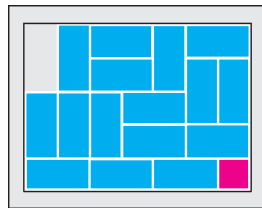
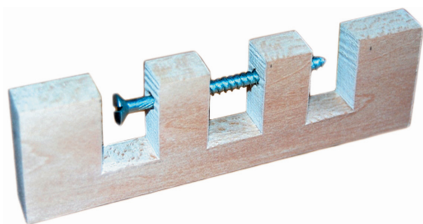


Рис. 6

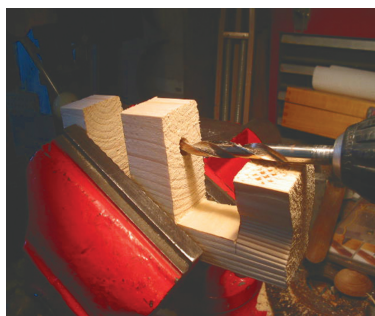
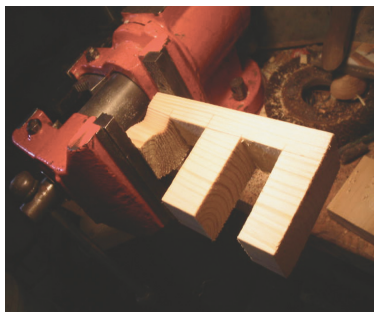
Еще раз о винте

В рубрике «Коллекция головоломок» в «Кванте» №2 читателям предлагалось понять, как вставить обычный винт или карандаш в деревянный брусок с несколькими пропилами и просверленным отверстием (или, что на самом деле то же самое – вынуть его из бруска). Винт,



повторимся, совершенно обычный, а в бруске никаких потайных дырок, которые не видны на фотографии, нет. Решение есть, но оно не очевидно. Может показаться, что можно как-то хитро согнуть винт, вставить его, а потом распрямить обратно. Проблема в том, что такой способ не сработает для карандаша. И остается вопрос, как просверлить отверстие.

Вот один из способов заключить винт (или карандаш) в деревянный плен. Для этого вам потребуется всего несколько инструментов: пила, дрель, тиски и... кастрюля с водой на плите. Сделайте в бруске несколько пропилов, чтобы получилось три или четыре зубца. Теперь самое интересное – как подготовить брусок, чтобы его можно было просверлить, а затем вставить винт. Для этого нужно временно устранить или хотя бы отодвинуть крайний зубец. Тут и пригодится кастрюля: оказывается,



древесину можно сильно размягчить, если брусок пропарить (этот способ работает для тонких кусков дерева) или проварить некоторое время. Нам должно хватить 10–15 минут (для более твердых пород дерева время может оказаться больше). Сразу после этого нужно сжать мокрую часть бруска тисками. Оставьте все в таком состоянии на день-два, чтобы дерево просохло. После этого можно снять тиски, спокойно просверлить отверстие и вставить винт на место. Как теперь восстановить деформированный зубец? Точно так же: снова проварить его. После того, как все высохнет, нужно будет окончательно обработать брусок, чтобы скрыть небольшие дефекты. И будет готова отличная игрушка, способная надолго озадачить ваших друзей.

Е.Епифанов

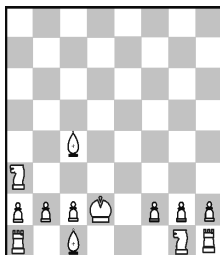
Поддавки

Более популярны поддавки шашечные, но и шахматные поддавки довольно интересны. Понятие мата здесь отсутствует, а побеждает тот, кто первым отдаст все свои фигуры или патует их. Взятие обязательно, а если есть выбор, то брать можно любую фигуру, включая короля. В этой игре тоже возможна ничья – например, если у соперников остались разнопольные слоны, или короли которые никогда не сблизятся, а будут вечно блуждать по доске.

Любопытно, что в шахматных поддавках имеется своя необычная теория. Как это ни парадоксально, но уже первый ход белой пешки «е» или «d» на два поля вперед является решающей ошибкой. Черные форсированно отдадут все свои фигуры.

1. e4? b5 2. ♖:b5 ♘f6 (тихий ход)
3. ♜:d7 ♘e4 4. ♜:c8 (возможность 4. ♜:e8 рассмотрена ниже) 4... ♘:d2
5. ♜:d2 ♜:d2 6. ♜:d2 ♘a6 7. ♜:a6 ♜c8
8. ♜:c8 f5 9. ♜:f5 ♜g8 10. ♜:h7
c5 11. ♜:g8 e6 12. ♜:e6 c4 13. ♜:c4
a6 14. ♜:a6 g5 15. ♜:g5 ♘d8
16. ♜:d8 ♜e7 17. ♜:e7, и на доске остались одни белые фигуры.

На 4. ♜:e8 решает 4... ♜:d2 5. ♜:d2 (5. ♜:f7 ♜:c1 6. ♜:c1 ♘:f2 7. ♘:f2 ♜g8 и т.д.) 5... ♘:d2 6. ♘:d2 ♜g8
7. ♜:f7 c5 8. ♜:g8 g6 9. ♜:h7 e5 10. ♜:g6
e4 11. ♜:e4 c6 12. ♜:c6 ♘b7 13. ♜:b7 ♜c8
14. ♜:c8 a6 15. ♜:a6 c4 16. ♜:c4 ♘a3
17. ♘:a3, и черные взяли верх в поддавке.

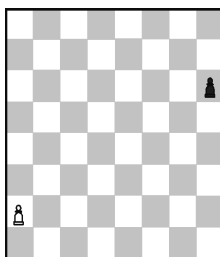


Черные покинули доску

Еще проще опровергается первый ход ферзевой пешки: 1. d4 e5! 2. de ♜g5! 3. ♜:d7 ♜:d7 (этот размен на d7 может произойти и позднее) 4. ♜:g5 ♘d8 5. ♜:d8 a6 6. ♜:c7 ♜a7 7. ♜:b8 b6 8. ♜:a7 a5 9. ♜:b6 g6 10. ♜:a5 ♜b4 11. ♜:b4 ♘e7 12. ♜:e7 ♜f8 13. ♜:f8 h6 14. ♜:h6 g5 15. ♜:g5 f6 16. ♜:f6 ♜h3 17. ♘:h3. Победа за черными!

Кстати, осторожное движение пешки «d» на одно поле тоже проигрывает в поддавке: 1. d3? g5! 2. ♜:g5 ♜g7 3. ♜:e7 ♜:b2 4. ♜:d8 ♜:a1 5. ♜:c7 ♜:c3 6. ♜:b8 ♜:b8 7. ♜:c3 d5 8. ♜:d5 ♘f6 9. ♜:f6 ♜g8 10. ♜:e8 ♜:g2 11. ♜:g2 f6 12. ♜:b7 ♜:b7 13. ♜:f6 ♜b8 14. ♘:h7 ♜b1 15. ♜:b1 ♜b7 16. ♜:b7 a6 17. ♜:a6, и на доске остались одни белые фигуры.

Оригинальные и неожиданные идеи содержатся в поддавках и в окончаниях игры. Во всех приведенных здесь позициях белые начинают и выигрывают в поддавки. Очевидно, проще положения, чем это, не придумаешь. Но посмотрите, сколько тонкостей оно содержит!



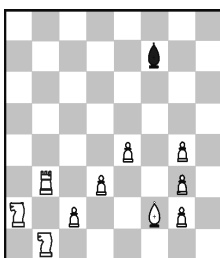
Выигрыш в поддавки

1. a3! Белые, как говорят в таких случаях, уступают темп противнику – обычный прием в нормальных шахматах. 1...h5 2. a4 h4 3. a5 h3 4. a6 h2 5. a7 h1 ♜! Если черные ставят ферзя или слона, то после любого превращения белой пешки они вынуждены будут сразу взять новую фигуру.

На 5...h1 ♘ следует 6. a8 ♜ и 7. ♜h1! Если на доске появится черный король (в поддавках возможно и такое) – 5...h1 ♘, то не годится 6. a8 ♜ или 6. a8 ♜ из-за 6... ♘g2.

К ничьей ведет и 6. a8 ♘ или 6. a8 ♘, а решает 6. a8 ♜! ♘g2 7. ♜a4 ♘f2 8. ♜d4 ♘g2 9. ♜e4 ♘h2 10. ♜f4 ♘h1 11. ♜f3 ♘g2 12. ♜f2 ♘:f2, и белые избавились от своей фигуры.

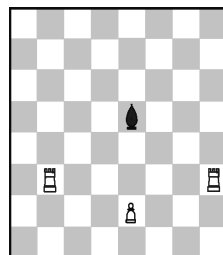
6. a8 ♜!! Белая пешка превращается



Т.Доусон. Выигрыш

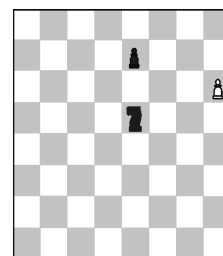
в еще более слабую фигуру, иначе черные легко отдадут свою ладью. Теперь же на любое ее движение следует 7. ♜h1! ♜:h1, и игра в поддавки закончилась в пользу белых.

Здесь от одних фигур белые избавляются, а другие патуют: 1. ♜b6! ♜:a2 2. ♜g6 ♜:b1 3. g5 ♜:c2 4. g4 ♜:d3 5. ♜h4! ♜:e4 6. g3 ♜:g6, и им нечем ходить.



Т.Доусон. Выигрыш

Проиллюстрируем интересную тему – симметрию на доске. 1. ♜b2! ♜:b2 2. ♜h8 ♜:h8 3. e4! Теперь 3... ♜e5 патует пешку, а в противном случае следует 4. e5! Однако не годится симметричное 1. ♜h2? ♜:h2. Вскре ♜:b8 3. e4 ♜a7! Слон увильнул и вскоре сам встанет под бой: 4. e5 ♜b6 5. e6 ♜a5 6. e7 ♜d8!



А.Корнилов. Выигрыш

В этой остроумной позиции решает 1. h7 ♘g4! 2. h8 ♘bелый! Появление другой белой фигуры на руку черным: 2. h8 ♜ ♘e5 3. ♜:e5 e6; 2. h8 ♜ ♘e5 3. ♜:e5 e6 и 4...e5; 2. h8 ♜ ♘h6 3. ♜:h6 e6; 2. h8 ♘ e6 3. ♘f7 (g6) ♘e5 4. ♘:e5, и они взяли верх в поддавке.

2...e5 3. ♘g7 ♘h2 4. ♘g6 e4 5. ♘g5 ♘g4 6. ♘:g4 e3 7. ♘g3 e2 8. ♘g2, и, во что бы ни превратилась черная пешка, король становится под удар.

Е.Гук